

А. Б. ХАРАЗИШВИЛИ

О КЛАССАХ ИНТРАНЗИТИВНОСТИ ГРУПП ДВИЖЕНИЙ ЭВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком Н. Н. Векуа 11 VII 1975)

Пусть E — произвольное пространство с действующей в нем группой преобразований G . Как известно, с G каноническим образом ассоциируется отношение эквивалентности в E , которое дает разбиение исходного пространства E на классы интранзитивности группы G . Если X есть любой из этих классов, то совершенно ясно, что X обладает следующим свойством:

$$(\forall x)(\forall y)(x \in X \& y \in X \Rightarrow (\exists g)(g \in G \& g(X \setminus \{x\}) = X \setminus \{y\})).$$

Естественно возникает вопрос: в какой мере свойства, аналогичные только что приведенному, характеризуют полную симметричность множества X относительно группы G ? В частности, предположим, что в качестве E взято n -мерное евклидово пространство E_n , и пусть X — такое непустое ограниченное подмножество E_n , что все множества семейства $(X \setminus \{x\})_{x \in X}$ конгруэнтны между собой. Спрашивается, вытекает ли отсюда существование группы движений E_n , для которой X служит одним из ее классов интранзитивности.

Оказывается, что ответ на последний вопрос зависит от мощности X .

Если $\text{Card } X < \aleph_0$, то ответ является утвердительным. Действительно, в этом случае X можно отождествить с множеством вершин k -мерного ($k = \text{Card } X - 1$) евклидова симплекса T , у которого $(k-1)$ -мерные грани попарно конгруэнтны. Легко видеть, что центры описанного и вписанного шаров симплекса T совпадают друг с другом, откуда сразу же получается, что группа самосовмещений T действует транзитивно на множестве его вершин.

Если же $\text{Card } X \geq \aleph_0$, то ответ на поставленный вопрос будет, вообще говоря, отрицательным. Для доказательства этого факта нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Следующее предложение принадлежит Яну Мыцельскому ⁽¹⁾.

Лемма 1. Пусть G_A — свободная группа, порожденная множеством A , B — часть A , G_B — та подгруппа G_A , системой образующих которой служит B , Q — часть G_B , $(P_j)_{j \in J}$ — семейство подмножеств G_B , $(g_j)_{j \in J}$ — семейство элементов из B такое, что $(\forall j)(j \in J \Rightarrow g_j \cdot Q = Q \setminus P_j)$. Тогда для каждого множества $P \subset Q$ и для всякой образующей g из $A \setminus B$ найдется множество Q' , удовлетворяющее нижеприводимым соотношениям:

- 1) $Q \subset Q' \subset G_{B \cup \{g\}}$;
- 2) $(\forall j)(j \in J \Rightarrow g_i \cdot Q' = Q' \setminus P_j)$;
- 3) $g \cdot Q' = Q' \setminus P$;
- 4) $\text{Card } Q' = \text{Card } Q + \text{Card } B + \aleph_0$.

Доказательство сформулированного утверждения не представляет особых трудностей. В самом деле, произвольный, отличный от единицы группы G_A , элемент f из $G_{B \cup \{g\}}$ имеет вид $g_1 \circ g_2^{k_2} \circ \dots \circ g_r^{k_r}$, где $k_1, k_2, \dots, k_r$ — целые числа, не равные нулю, а $g_1, g_2, \dots, g_r$ — образующие из множества $B \cup \{g\}$, причем $g_1 \neq g_2, g_2 \neq g_3, \dots, g_{r-1} \neq g_r$. Положим $\Phi_g = E_f(g, = g)$, $\Phi_B = = E_f(g, \in B)$. Непосредственно проверяется, что в качестве искомого Q'

можно взять объединение взаимно непересекающихся множеств Q , $\Phi_g \cdot (Q \setminus P)$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} g^k \cdot P$, $\Phi_{g^{-1}} \cdot (\bigcup_{k=1}^{\infty} g^k \cdot P)$.

Из леммы 1 при помощи элементарной индукции сразу же получается

Лемма 2. Пусть $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ — счетное семейство независимых образующих свободной группы G . Существует подмножество U этой группы, обладающее следующими свойствами:

- 1) $\{g_0, g_1, g_2\} \subset U$;
- 2) для любой непустой конечной части P множества U найдется индекс $i \in \mathbb{N}$ такой, что $g_i U = U \setminus P$.

Лемма 3. Существует свободная, порождаемая счетным числом независимых образующих группа вращений евклидова пространства E_3 вокруг его начала координат. Более того, пусть $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ — произвольное счетное семейство вращений E_3 , $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ — семейство их окрестностей. Тогда найдется последовательность $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ независимых вращений пространства E_3 такая, что $(\forall i) (i \in \mathbb{N} \Rightarrow g_i \in V_i)$.

В связи с леммой 3 отметим, что существуют и континуальные свободные группы, состоящие из изометрических преобразований трехмерного пространства, оставляющих неподвижной фиксированную его точку ⁽²⁾. Последнее утверждение немедленно вытекает из такого общего факта: если G — неконтиуальная свободная группа вращений E_3 , то всегда можно подыскать вращение $g \notin G$, для которого группа, порожденная множеством $GU\{g\}$, также будет свободной. В основе приведенного факта лежит следующее простое обстоятельство: каково бы ни было неконтиуальное семейство $(F_j(x_1, x_2, x_3))_{j \in J}$ полиномов, не равных тождественно нулю, объединением множеств их корней нельзя покрыть непустой открытой части пространства E_3 (а также части E_3 со строго положительной лебеговской мерой).

Определение. Пусть (E, ρ) — метрическое пространство, G — некоторая группа изометрических преобразований E . Будем говорить, что G действует совершенно свободно в E , если соотношения $x \in E$, $f \in G$, $g \in G$, $\rho(x, f(x)) = \rho(x, g(x))$ в совокупности влекут дизъюнкцию $f = g \vee f = g^{-1}$.

Ясно, что группа, действующая совершенно свободно в метрическом пространстве E , действует и свободно в нем. Обратное, вообще говоря, неверно, в чем легко можно убедиться на простых примерах.

Лемма 4. Пусть S_2 — двумерная единичная сфера в евклидовом пространстве E_3 , G — группа вращений E_3 , порожденная счетной системой $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ свободных образующих, U — подмножество G , удовлетворяющее условиям леммы 2. Допустим, кроме того, что векторы $g_0(e_1)$, $g_1(e_1)$, $g_2(e_1)$, где e_1 — орт канонического базиса в E_3 , линейно независимы. В этих предположениях существует точка $x \in S_2$, для которой выполняются нижеприводимые соотношения:

- 1) группа G действует совершенно свободно на орбите $G(x)$;
- 2) точки $g_0(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ не лежат на одной большой окружности S_2 ;
- 3) множество $U(x)$ не лежит в одной плоскости.

Нетрудно видеть, что точки $x \in S_2$, для которых справедливы соотношения 1)–3) предыдущей леммы, образуют множество второй категории на единичной сфере S_2 .

Предложение 1. Сфера S_2 содержит в себе счетную часть X , обладающую следующими свойствами:

- а) $(\forall Y) (Y \subset X \ \& \ \text{Card } Y < \aleph_0 \Rightarrow X \setminus Y \text{ конгруэнтно с } X)$;
- б) X не является классом интранзитивности какой-либо группы движений пространства E_3 .

Доказательство предложения 1 непосредственно получается из леммы 4. Действительно, используя обозначения этой леммы, положим $X = U(x)$. Тогда очевидно, что соотношение а) имеет место для такого множества X . Пусть, далее, f — изометрическое преобразование пространства E_3 , переводящее X в самого себя. Ясно, что f оставляет неподвижным нача-

ло координат E_3 . Если $f(g_0(x)) = \varphi_0(x)$, $f(g_1(x)) = \varphi_1(x)$, $f(g_2(x)) = \varphi_2(x)$, где $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ — элементы из U , то в силу совершенно свободного действия группы G на орбите $G(x)$ и в силу независимости образующих g_0, g_1, g_2 должны быть справедливыми равенства $\varphi_0 \circ g_0^{-1} = \varphi_1 \circ g_1^{-1} = \varphi_2 \circ g_2^{-1}$. Отсюда вытекает, что $f = \varphi_0 \circ g_0^{-1} = \varphi_1 \circ g_1^{-1} = \varphi_2 \circ g_2^{-1}$ и, следовательно, f принадлежит к группе G . Возьмем теперь движение f таким, чтобы было верным соотношение $f(X) = X \setminus \{y\}$, где y — произвольный элемент из X . Тогда из вышесказанного ясно, что не существует изометрического преобразования E_3 , отображающего множество X на самого себя и переводящего точку $g_0(x)$ в точку $f(g_0(x))$. Ввиду этого X не есть класс интранзитивности какой-либо группы движений пространства E_3 .

З а м е ч а н и е 1. Аналогично предложению 1 при помощи трансфинитной индукции можно показать, что для всякого кардинального числа $\alpha \in I\aleph_0, 2^{\aleph_0}I$ существует множество $X \subset S_2$ с $\text{Card } X = \alpha$, для которого выполняются соотношения а) и б).

З а м е ч а н и е 2. Если вместо E_3 взять вещественное гильбертово пространство l_2 , то пример счетного множества $X \subset l_2$, обладающего интересующими нас свойствами, можно дать, исходя из других соображений. Именно, рассмотрим полный граф Z мощности $\aleph_0$, все ребра которого окрашены в два цвета a и b , причем предположим, что Z удовлетворяет следующим соотношениям:

1) $(\exists Y) (Y \subset Z \ \& \ \text{Card } Y = \aleph_0 \ \& \ \text{все ребра графа } Z, \text{ инцидентные вершинам множества } Y, \text{ имеют цвет } a)$;

2) число ребер графа Z , окрашенных в цвет b , счетно и никакие два из них не обладают общей вершиной.

Указанный граф можно реализовать в гильбертовом пространстве l_2 ⁽³⁾. Тем самым в l_2 будет получено нужное нам множество X .

Структура, заданная на основном базисном множестве E ⁽⁴⁾, называется совершенно симметричной (или однородной), если группа ее автоморфизмов действует транзитивно на E . В связи со сделанным выше замечанием отметим, что имеет место

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть X — бесконечное множество, $(X_j)_{j \in J}$ — семейство частей X , причем $\text{Card } J = \text{Card } X$ и $(\forall j) (j \in J \Rightarrow \text{Card } X_j = \text{Card } X)$. Тогда на X существует структура графа, не являющаяся однородной и такая, что все ее подграфы X_j ($j \in J$) изоморфны между собой.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
25 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

¹ J. Mycielski, Fund. Math., v. 42 (1955). ² W. Sierpinski, Fund. Math., v. 33 (1945). ³ А. Б. Харацишвили, Сообщ. АН ГрузССР, т. 76, № 1 (1974). ⁴ Н. Бурбаки, Теория множеств, М., 1965.