

Л. Б. ШАПИРО

ОБ АБСОЛЮТАХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ И НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 30 X 1975)

Работа состоит из двух частей. В первой части осуществлено построение абсолюта произвольного топологического пространства классическим методом центрированных систем открытых множеств, что оказывается проще, чем способ, предложенный для этого В. М. Ульяновым. Во второй части доказано существование «абсолюта» произвольного непрерывного отображения произвольных топологических пространств.

1. В ⁽¹⁾ применен метод центрированных систем открытых множеств для построения абсолюта хаусдорфова пространства.

О п р е д е л е н и е 1. Абсолютом топологического пространства X называется экстремально несвязное пространство qX такое, что существует отд^{на} делимое совершенное неприводимое непрерывное отображение $\pi_X: qX \rightarrow X$. (Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется отд^{на} делимым, если для любых $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, удовлетворяющих условию $f(x_1) = f(x_2)$, существуют дизъюнктивные в X окрестности.)

В ⁽²⁾ доказаны существование и единственность абсолюта для произвольного топологического пространства. Заметим, что вопрос о построении абсолюта хаусдорфова пространства с непрерывной естественной проекцией рассматривался в ⁽⁵⁾.

Проведем для произвольного топологического пространства X построение абсолюта qX методом центрированных систем.

Пусть K — множество всех отмеченных ультрафильтров открытых множеств в X , т. е. $\xi \in K$ тогда и только тогда, когда $\bigcap [U] \neq \emptyset$. Примем по определению $qX = \{(\xi, x) \in K \times X: x \in \bigcap_{U \in \xi} [U]\}$. Точку $(\xi, x) \in qX$ будем обозначать ξ_x . Можно определить естественную проекцию множеств $\pi_X: qX \rightarrow X$: $\pi_X \cdot (\xi_x) = x$.

Положим $O_U = \{\xi_x \in qX: U \in \xi\}$ для всех U , открытых в X . Перечислим основные свойства множеств O_U ⁽¹⁾:

- а) $O_{U \cup V} = O_U \cup O_V$;
- б) $O_{U \cap V} = O_U \cap O_V$;
- в) $[U] = [V]$ влечет $O_U = O_V$.

За базу топологии в qX примем совокупность множеств вида $O_U \cap \pi_X^{-1}(H)$, где U, H — открыты в X . Это база, так как

$$(O_U \cap \pi_X^{-1}(H_1)) \cap (O_{U_2} \cap \pi_X^{-1}(H_2)) = O_{U_1 \cap U_2} \cap \pi_X^{-1}(H_1 \cap H_2).$$

Заметим, что тогда $\pi_X: qX \rightarrow X$ — непрерывное отображение «на».

У т в е р ж д е н и е 1. $\pi_X^{-1}(U \cap H) \subset O_U \cap \pi_X^{-1}(H) \subset O_{U \cap H}$.

Из утверждения 1 следует, что отображение π_X неприводимо.

У т в е р ж д е н и е 2. π_X — отд^{на} делимое отображение.

У т в е р ж д е н и е 3. Для всякого $x \in X$ $\pi_X^{-1}(x)$ — бикомпакт.

У т в е р ж д е н и е 4. π_X — замкнутое отображение.

Из утверждений 3, 4 следует, что отображение π_X является совершенным.

У т в е р ж д е н и е 5. Пространство qX экстремально несвязно.

Доказательство. Можно проверить, что

$$\left[\bigcup_{\alpha} \{O_{U_{\alpha}} \cap \pi_X^{-1}(H_{\alpha})\} \right] = O_{\bigcup_{\alpha} (U_{\alpha} \cap H_{\alpha})},$$

откуда вытекает экстремальная несвязность пространства qX .

Тем самым доказано, что пространство qX и отображение $\pi_X: qX \rightarrow X$ удовлетворяют всем требованиям определения 1. Как видно, классический метод центрированных систем открытых множеств, впервые примененный в (4), приводит здесь к цели несколько быстрее, чем метод, предложенный в (2).

Доказательство единственности абсолюта будет дано ниже

Заметим, что из определения топологии на qX вытекает, что если X регулярно, то qX вполне регулярно, так как открыто-замкнутые множества в qX суть в точности множества O_U . Тем самым в регулярном случае приходим к теории абсолютов В. И. Пономарева (6).

2. Определение 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Непрерывное отображение $f_q: qX \rightarrow qY$ называется абсолютом отображения f , если $f \cdot \pi_X = \pi_Y \cdot f_q$.

Определение 3 (см. (2)). Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств называется ϵ -отображением, если прообраз границы любого канонического открытого множества в Y нигде не плотен в X .

В (2) доказано, что каждое ϵ -отображение имеет единственный абсолют. Мы покажем, во-первых, что любое непрерывное отображение имеет абсолют, и, во-вторых, что из единственности абсолюта вытекает, что данное отображение есть ϵ -отображение.

Определение 4. Пусть X, Y — топологические пространства. Отображение $\psi: X \rightarrow \mathcal{F}_c(Y)$ пространства X во множество бикомпактных подпространств Y называется полунепрерывным сверху, если для любого $U \subset Y$ — открытого множества $M(U, \psi) = \{x \in X: \psi(x) \subset U\}$ открыто в X .

ψ называется отделимым, если для любых $y_1, y_2 \in \psi(x)$, $y_1 \neq y_2$, существуют дизъюнктивные в Y окрестности. ψ называется бикомпактным, если $A(y, \psi) = \{x \in X: y \in \psi(x)\}$ — бикомпакт для любого $y \in Y$. ψ называется замкнутым, если $B(F, \psi) = \bigcup \{\psi(x): x \in F\}$ замкнуто для любого замкнутого $F \subset X$.

Определение 5. Пусть ψ_1, ψ_2 — полунепрерывные сверху отображения X в $\mathcal{F}_c(Y)$. Тогда $\psi_1 \leq \psi_2$, если $\psi_2(x) \subset \psi_1(x)$ для любого $x \in X$.

Лемма 1 (см. (3)). Пусть $\{\psi_{\lambda}\}$ — линейно упорядоченное множество полунепрерывных сверху отделимых отображений. Положим $\psi(x) = \bigcap_{\lambda} \psi_{\lambda}(x)$.

Тогда отображение ψ полунепрерывно сверху и отделимо. Если все ψ_{λ} бикомпактны, то ψ бикомпактно. Если все ψ_{λ} замкнуты и бикомпактны, то ψ замкнуто и бикомпактно.

Эта лемма показывает, что для указанных в ней классов отображений выполняется условие леммы Куратовского — Цорна. Следовательно, в каждом из этих классов существует максимальный элемент.

Лемма 2 (см. (3)). Если $x \in [M(U, \psi)]$, где ψ полунепрерывно сверху, то $\psi(x) \cap [U] \neq \emptyset$.

Лемма 3. Пусть X, Y — экстремально несвязны; $\psi: X \rightarrow \mathcal{F}_c(Y)$ полунепрерывно сверху, отделимо и не однозначно. Тогда существует $\psi_1 > \psi$ — полунепрерывное сверху и отделимое. Если ψ бикомпактно, то ψ_1 бикомпактно. Если ψ замкнуто и бикомпактно, то ψ_1 замкнуто и бикомпактно.

Доказательство. Существует $x_0 \in X: |\psi(x_0)| > 1$, т. е. существуют $y_1, y_2 \in \psi(x_0): y_1 \neq y_2$. В силу отделимости ψ и экстремальной несвязности Y существуют V_1, V_2 открыто-замкнутые: $y_1 \in V_1, y_2 \in V_2, V_1 \cup V_2 = Y, V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Если $x_0 \in [M(V_1, \psi)]$, то положим

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x) \cap V_1, & x \in [M(V_1, \psi)]; \\ \psi(x), & x \in X \setminus [M(V_1, \psi)]. \end{cases}$$

Если $x_0 \in [M(V_2, \psi)]$, то положим

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x) \cap V_2, & x \in [M(V_2, \psi)]; \\ \psi(x), & x \in X \setminus [M(V_2, \psi)]. \end{cases}$$

Если $x_0 \notin [M(V_1, \psi)] \cup [M(V_2, \psi)]$, то

$$x_0 \in X_1 = X \setminus ([M(V_1, \psi)] \cup [M(V_2, \psi)]).$$

Если $x \in X$, то $\psi(x) \cap V_1 \neq \emptyset$ и $\psi(x) \cap V_2 \neq \emptyset$, так как иначе $x \in M(V_1, \psi) \cup M(V_2, \psi)$. Поэтому положим

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x) \cap V_1, & x \in X_1; \\ \psi(x), & x \notin X_1. \end{cases}$$

Таким образом, определенное ψ_1 удовлетворяет всем требованиям леммы 3.

Теорема 1. Пусть X, Y экстремально несвязны. $\psi: X \rightarrow \mathcal{F}_c(Y)$ отделимо и полунепрерывно сверху. Тогда существует непрерывное $f: X \rightarrow Y$ такое, что $f(x) \in \psi(x)$ для всех $x \in X$. Если ψ бикомпактно, то f бикомпактно. Если ψ замкнуто и бикомпактно, то f совершенно.

Доказательство вытекает из лемм 1 и 3.

Следствие 1. Пусть X — экстремально несвязное, Y — произвольное пространство, $\theta: X \rightarrow \mathcal{F}_c(Y)$ отделимо и полунепрерывно сверху. Тогда существует такое непрерывное $f: X \rightarrow Y$, что $f(x) \in \theta(x)$ для всех $x \in X$.

Это следствие обобщает теорему 1.1 работы (3).

Следствие 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение произвольных топологических пространств. Тогда существует $f_q: qX \rightarrow qY$ — абсолют отображения f :

- а) если f бикомпактно, то f_q бикомпактно;
- б) если f совершенное «на», то f_q совершенное «на»;
- в) если f отделимо, то f_q отделимо;
- г) если f отделимо, неприводимо, совершенно и «на», то f_q — гомеоморфизм.

Заметим, что тем самым доказана единственность абсолюта для произвольного топологического пространства.

Теорема 2. $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение произвольных топологических пространств является c -отображением тогда, и только тогда, когда f имеет единственный абсолют.

Доказательство.

- а) Пусть f — c -отображение и f_q и h_q — два несовпадающих его абсолюта. Существует $x_0 \in qX$; $f_q(x_0) \neq h_q(x_0)$,

$$f_q(x_0), h_q(x_0) \in \pi_Y^{-1}(f(\pi_X(x_0))),$$

следовательно, существуют открыто-замкнутые $V_1, V_2 \subset qY$:

$$f_q(x_0) \in V_1; \quad h_q(x_0) \in V_2; \quad V_1 \cup V_2 = qY; \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

$\pi_X^* V_1 = U_1$, $\pi_X^* (V_2) = U_2$ — канонические открытые множества в Y .

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad [U_1] \cup [U_2] = Y. \quad \text{Fr } U_1 = X \setminus (U_1 \cup U_2).$$

Так как $\pi_Y f_q = f \pi_X = \pi_Y h_q$, то $\pi_X^{-1} f^{-1}(U_1) = h_q^{-1} \pi_Y^{-1}(U_1)$ и $\pi_X^{-1} f^{-1}(U_2) = f_q^{-1} \pi_Y^{-1}(U_2)$. Но $\pi_X^{-1}(U_1) \subset V_1$. Поэтому $x_0 \notin [f_q^{-1} \pi_Y^{-1}(U_1)]$, так как $h_q(x_0) \in V_2$. Аналогично $x_0 \notin [f_q^{-1} \pi_Y^{-1}(U_2)]$. Следовательно, $x_0 \in qX \setminus ([\pi_X^{-1} f^{-1}(U_1)] \cup [\pi_X^{-1} f^{-1}(U_2)]) \subset \pi_X^{-1} f^{-1}(\text{Fr } U_1)$. Следовательно, $\text{Int}(\pi_X^{-1} \times f^{-1}(\text{Fr } U_1)) \neq \emptyset$, т. е. $\text{Int}(f^{-1}(\text{Fr } U_1)) \neq \emptyset$, так как π_X — неприводимо. Это противоречит тому, что f — c -отображение.

б) Пусть f — не c -отображение. Тогда существует каноническое открытое $U_1 \subset Y$: $\text{Int}(f^{-1}(\text{Fr } U_1)) \neq \emptyset$. Пусть $U_2 = Y \setminus [U_1]$, $V_1 = [\pi_Y^{-1}(U_1)]$, $V_2 = [\pi_Y^{-1}(U_2)]$. Тогда $V_1 \cup V_2 = qY$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, V_1, V_2 — открыто-замкнуты. Определим $\psi: qX \rightarrow \mathcal{F}_c(qY)$: $\psi(x) = \pi_Y^{-1}(f \pi_X(x))$. $M(V_1, \psi) = \pi_X^{-1}(f^{-1}(\pi_Y^* \times$

$\times (V_1))$). $U_1 \subset \pi_Y^{-1}(V_1) \subset [U_1]$, поэтому $U_1 = \pi_Y^{-1}(V_1)$. $M(V_1, \psi) = \pi_X^{-1}(f^{-1} \times \times (U_1))$. Аналогично $M(V_2, \psi) = \pi_X^{-1}(f^{-1}(U_2))$. $qX \setminus (M(V_1, \psi) \cup M(V_2, \psi)) = \pi_X^{-1}f^{-1}(\text{Fr } U_1)$. $\text{Int } \pi_X^{-1}f^{-1}(\text{Fr } U_1) \neq \emptyset$, поэтому $qX \times ([M(V_1, \psi)] \cup \cup [M(V_2, \psi)]) = X_1$ — непустое открыто-замкнутое множество. Если $x \in X_1$, то $\psi(x) \cap V_1 \neq \emptyset$ и $\psi(x) \cap V_2 \neq \emptyset$. Поэтому положим

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x) \cap V_1, & x \in X_1, \\ \psi(x), & x \in qX \setminus X_1; \end{cases} \quad \psi_2(x) = \begin{cases} \psi(x) \cap V_2, & x \in X_1, \\ \psi(x), & x \in qX \setminus X_1. \end{cases}$$

Тогда ψ_1, ψ_2 — полунепрерывны сверху и отделимы (лемма 3, случай 3). Следовательно, по теореме 1 существуют $f_q^1, f_q^2: qX \rightarrow qY: f_q^1(x) \in \psi_1(x), f_q^2(x) \in \psi_2(x)$. Но если $x_0 \in X_1 \neq \emptyset$, то $\psi_1(x_0) \cap \psi_2(x_0) = \emptyset$, т. е. $f_q^1(x_0) \neq f_q^2(x_0)$, т. е. $f_q^1 \neq f_q^2$. Следовательно, если f — не ϵ -отображение, то существуют по крайней мере два его абсолюта. Теорема 2 полностью доказана.

В заключение автор выражает признательность П. С. Александрову за внимание к данной работе и В. И. Пономареву за постоянную поддержку и консультации.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Ильядис, С. В. Фомин, УМН, т. 21, № 4 (1966). ² В. М. Ульянов, Матем. сб., т. 98, № 2 (1975). ³ М. Hasumi, Math. Ann., v. 179, № 2 (1969). ⁴ П. С. Александров, Матем. сб., т. 5 (1939). ⁵ С. Ильядис, ДАН, т. 152, № 4 (1963). ⁶ В. И. Пономарев, ДАН, т. 149, № 1 (1963).