

Е. В. ЩЕПИН

**О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ, ГРУППАХ
И НОВОМ КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВ БОЛЕЕ ОБЩИХ,
ЧЕМ МЕТРИЧЕСКИЕ**

(Представлено академиком П. С. Александровым 30 X 1975)

Для любого топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

1. Любые два непересекающиеся канонически замкнутые * множества в X имеют непересекающиеся окрестности (т. е. пространство X κ -нормально⁽⁹⁾), и всякое канонически замкнутое множество в X является пересечением счетного числа канонически открытых.

2. Всякое канонически замкнутое в X множество является множеством нулей некоторой непрерывной вещественной функции.

3. Для любых двух непересекающихся открытых в X множеств существует такая непрерывная на X вещественная функция, которая больше нуля на одном из них и меньше нуля на другом.

Пространство, удовлетворяющее одному (и, следовательно, всем) из этих условий, мы будем называть совершенно κ -нормальным. Понятие совершенно κ -нормального пространства возникает из понятия κ -нормального аналогично тому, как понятие совершенно нормального пространства возникает из понятия нормального пространства.

Впервые пространства, близкие к нормальным, были изучены В. И. Зайцевым, который в ⁽³⁾ доказал, что для того, чтобы бикомпактные расширения βX Чеха — Стоуна и $\omega_* X$ Поломарева — Зайцева совпадали, необходимо и достаточно, чтобы пространство X было квазинормально в следующем смысле: любые два непересекающихся π -множества (π -множеством Зайцев называет пересечение конечного числа канонически замкнутых множеств) в X имеют непересекающиеся окрестности. Понятие κ -нормального пространства является непосредственным обобщением квазинормального. Автором этой заметки в ⁽⁹⁾ построен пример регулярного κ -нормального, но не квазинормального пространства и изучены возможности продолжения непрерывных вещественных функций с канонически замкнутых множеств в пространствах, близких к нормальным. Всякое совершенно κ -нормальное пространство является квазинормальным в смысле Зайцева. Первоначально понятие совершенно κ -нормального пространства использовалось автором для доказательства квазинормальности различных пространств, но дальнейшие исследования показали, что оно представляет самостоятельный интерес, вероятно, даже больший, чем понятие квазинормального пространства, из которого оно возникло.

В классе нормальных пространств условие совершенной κ -нормальности совпадает со следующим условием отделимости, введенным в ⁽⁵⁾ А. Пелчинским под названием «условие отделимости Бокштейна»: любые два непересекающихся открытых множества можно заключить в открытые непересекающиеся множества типа F_σ .

* Множество называется канонически замкнутым, если оно является замыканием своей внутренности. Дополнение к канонически замкнутому множеству называется канонически открытым.

Сам М. Ф. Бокштейн в своей работе ⁽²⁾ никакого условия отделимости, пригодного для всех топологических пространств не сформулировал, хотя из доказанной им там теоремы фактически вытекает, что произведение сепарабельных метрических пространств удовлетворяет «условию отделимости Бокштейна» в смысле Пелчинского. Пелчинский (см. ⁽⁵⁾) доказал, что всякое пространство Милютина и всякое пространство Дугунджи удовлетворяет условию отделимости Бокштейна или, в нашей терминологии, совершенно κ -нормально. В частности, из результатов Пелчинского следует, что пространство всякой бикompактной топологической группы совершенно κ -нормально.

Всякое совершенно нормальное пространство будет совершенно κ -нормальным, но класс совершенно κ -нормальных пространств гораздо шире; кроме произведений сепарабельных метрических пространств, которые он содержит в силу результатов Бокштейна, он включает в себя, например, все экстремально несвязные пространства. Важным случаем, когда совершенно κ -нормальные пространства возникают в ненормальном виде, является произведение метрических пространств. В силу теоремы А. Стоуна ⁽⁸⁾ произведение несчетного числа некомпактных метрических пространств не является нормальным пространством, в то же время справедлива

Теорема 1. *Произведение метризуемых пространств в любом количестве является совершенно κ -нормальным пространством.*

Совершенно κ -нормальные пространства вполне регулярны, если только они полурегулярны. Совершенная κ -нормальность наследуется по канонически замкнутым, открытым, а также всюду плотным множествам. Еще один пример совершенно κ -нормального пространства, естественно возникающего из метрических пространств, дает следующая

Теорема 2. *Бикompактное расширение метрического пространства, соответствующее метрической близости ⁽⁷⁾, совершенно κ -нормально.*

Следующие теоремы аналогичны соответствующим теоремам для совершенно нормальных пространств.

Теорема 3. *Произведение метрического и совершенно κ -нормального пространств совершенно κ -нормально.*

Теорема 4. *Произведение счетного числа пространств будет совершенно κ -нормальным, если таковым будет каждое его конечное подпроизведение.*

В то же время квадрат совершенно κ -нормального пространства уже может не быть совершенно κ -нормальным; примером такого пространства может служить известное пространство «две стрелки» П. С. Александрова (см. ⁽¹⁾). Можно также привести пример произведения, все счетные подпроизведения которого совершенно κ -нормальны, но само оно таковым не является.

Анализ доказательства теоремы 1 показывает, что от сомножителей на самом деле нужно несколько меньше, чем наличие метрики, например, оно проходит и в случае, когда часть сомножителей является «стрелкой» Зоргенфрея; и в то же время доказываемое несколько больше, чем совершенная κ -нормальность. А именно, для доказательства совершенной κ -нормальности нужно для каждого канонически замкнутого множества построить аннулирующую его непрерывную функцию. В случае произведения метрических пространств это можно сделать согласованно для всех канонически замкнутых множеств. Точная формулировка этой «согласованности» приводит нас к понятию структуры нового типа, которую мы будем называть емкостью. Пространство емкости является обобщением метрического пространства. В пространстве с емкостью определено понятие ε -окрестности без введения понятия о расстоянии между точками.

Перейдем к точной формулировке. Емкостью на топологическом пространстве X называется функция ε , сопоставляющая каждой паре x, F , где $x \in X$ и F замкнуто в X , неотрицательное число $\varepsilon_x F$ так, что выполнены следующие аксиомы:

Е1. $\epsilon_x F > 0$ в том и только том случае, когда x является внутренней точкой F .

Е2. Если $A \subset B$, то $\epsilon_x A \leq \epsilon_x B$.

Е3. $\epsilon_x F$ непрерывно зависит от x при фиксированном F .

Е4. Если $\{F_\alpha\}$ — семейство замкнутых множеств, линейно упорядоченное по включению, то $\epsilon_x(\cap_\alpha F_\alpha) = \inf_\alpha \epsilon_x F_\alpha$ для любого $x \in X$.

Всякое пространство с емкостью является совершенно κ -нормальным (это следует уже из Е1 и Е3). Емкость в метрическом пространстве определяется так: $\epsilon_x F$ — это расстояние от x до дополнения к F . Оказывается, что справедлива следующая теорема, обобщающая теорему 1.

Теорема 5. Произведение любого количества пространств с емкостью имеет емкость.

Емкость нового типа можно определить в локально-бикомпактной топологической группе. А именно, положим $\epsilon_e F$ (e — единица нашей группы) равным верхней грани таких чисел ϵ , что существует такое симметричное множество, мера Хаара которого равна ϵ , содержащееся в F вместе со своим квадратом. Полагая $\epsilon_x F = \epsilon_e F x^{-1}$ для любого x из нашей группы, получаем правоинвариантную емкость на группе. Емкость можно ввести и на более широком классе топологических групп: на так называемых почти метризуемых группах в смысле Б. А. Пасынкова (⁴). Группа называется почти метризуемой, если она содержит бикомпактную подгруппу, фактор-пространство по которой метризуемо.

Теорема 6. Почти метризуемая группа имеет емкость.

Следующая теорема позволяет придать точный смысл высказыванию А. Пелчинского о пространствах Милютина и Дугунджи (см. (⁵), стр. 9): «Оба класса включают компактные метрические пространства, их произведения и являются, в некотором смысле, более «близкими» к метрическим пространствам, чем другие классы компактных пространств».

Теорема 7. Пространства Милютина и Дугунджи имеют емкость.

Приведенных примеров на наш взгляд достаточно, чтобы считать понятие емкости заслуживающим изучения. Приведем некоторые результаты о пространствах с емкостью.

Теорема 8. Ретракт пространства с емкостью имеет емкость.

Теорема 9. Упорядоченное пространство с емкостью метризуемо.

Теорема 10. Линделефово пространство с емкостью удовлетворяет условию Суслина.

Теорема 11. Экстремально несвязное пространство с емкостью дискретно.

Теорема 12. Если группа имеет емкость, то и всякое ее фактор-пространство имеет емкость.

Теорема 13. π -Вес в смысле Пономарева (см. (⁶)) совпадает с весом в бикомпакте с емкостью, а π -характер с характером.

Отметим, что из последней теоремы следует, что бикомпакт с емкостью, содержащий всюду плотное множество точек, в которых выполнена первая аксиома счетности, метризуем.

В заключение автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю П. С. Александрову за внимание, которое он оказал этой работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. С. Александров, П. С. Урысон, Мемуар о компактных топологических пространствах, М., 1971. ² М. Ф. Бокштейн, Fund. Math., v. 35, 242 (1948). ³ В. И. Зайцев, ДАН, т. 178, № 4 (1968). ⁴ Б. А. Пасынков, ДАН, т. 164, № 2 (1965). ⁵ А. Пелчинский, Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения, М., 1970. ⁶ В. И. Пономарев, УМН, т. 21, в. 4 (1966). ⁷ Ю. М. Смирнов, Матем. сб., т. 31 (73) (1952). ⁸ А. Н. Stone, Bull. Am. Math. Soc., v. 54, 977 (1948). ⁹ Е. В. Щепин, Сибирск. матем. журн., т. 13, № 5 (1972).