

Н. Н. ЯКОВЛЕВ

О g -МЕТРИЗУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 25 IX 1975)

G -метризуемые пространства введены в ⁽¹⁾, где о них доказано:

1. G -метризуемое пространство есть симметризуемое σ -пространство (т. е. обладает σ -локально-конечной сетью), в частности, σ -паракомпактно.
2. G -метризуемое пространство Фреше — Урысона метризуемо.
3. G -метризуемые пространства совпадают с o -метризуемыми пространствами, имеющими σ -локально-конечные cs -сети.

В ⁽¹⁾ поставлен ряд вопросов о свойствах g -метризуемых пространств. Данная работа содержит ответы на большинство этих вопросов.

Понятие слабой базы возникло при изучении факторных отображений метрических пространств.

О п р е д е л е н и е 1. ⁽²⁾. Пусть каждой точке $x \in X$ поставлено в соответствие семейство $\mathcal{B}_x = \{B \subseteq X: x \in B\}$. Семейство $\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{B}_x: x \in X\}$ называется слабой базой пространства X , если:

1. Для всяких B_1, B_2 из $\mathcal{B}_x$ существует $B_3 \in \mathcal{B}_x$ такое, что $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$;
2. $U \subseteq X$ открыто в X тогда и только тогда, когда для всякого $x \in U$ найдется $B \in \mathcal{B}_x$ и $B \subseteq U$.

Пространство X удовлетворяет gf -аксиоме счетности, если в X существует слабая база $\mathcal{B}$ такая, что для всякой точки $x \in X$ $\mathcal{B}_x$ счетно.

О п р е д е л е н и е 2 ⁽¹⁾. Регулярное пространство X называется g -метризуемым, если оно обладает σ -локально-конечной слабой базой $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ (семейство $\mathcal{B}_n$ локально-конечно).

Будем всегда считать, что $X \in \mathcal{B}_n$ для всякого n , и $X \in \mathcal{B}_x \cap \mathcal{B}_n$ для всякого $x \in X$. В силу регулярности X все элементы $B \in \mathcal{B}_n$ для всякого n можно считать замкнутыми. Положим $O_n(x) \in \bigcap \{B: B \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i \text{ и } B \in \mathcal{B}_x\}$. Тогда семей-

ство $\mathcal{U} = \{O_n(x): x \in X; n=1, 2, \dots\}$ — слабая база X , $\mathcal{U}_x = \{O_n(x): n=1, 2, \dots\}$. Ясно, также, что $\mathcal{U}_n = \{O_n(x): x \in X\}$ локально-конечно.

Положим $\rho(x, y) = 1$, при $y \notin O_1(x)$ и $\rho(x, y) = 1/n$ при $y \in O_{n-1}(x) \setminus O_n(x)$. Тогда ρ — o -метрика, порождающая топологию X , которую мы назовем естественной. В ней $O_\rho(x, 1/n) = O_n(x)$.

Условие (s_1) : если $\rho(x, x_n) \rightarrow 0$, то $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ ⁽³⁾.

Предложение 1. ⁽²⁾. Пусть o -метрика ρ удовлетворяет условию (s_1) , тогда X симметризуемо симметрикой $d: d(x, y) = \max \{\rho(x, y), \rho(y, x)\}$.

Л е м м а 1. Пусть ρ — естественная o -метрика на X и $x_n \rightarrow x$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ и для всякой подпоследовательности $\{x_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ существуют $k, m: k \neq m$ такие, что:

- а) $\rho(x_{n(k)}, x_{n(m)}) < \varepsilon$, $\rho(x_{n(m)}, x_{n(k)}) < \varepsilon$;
- б) $\rho(x_{n(k)}, x) < \varepsilon$.

Говорят, что симметризуемое пространство (X, d) удовлетворяет слабому условию Коши (СК) ⁽⁴⁾, если для всякого $A \neq [A]_{\tau_d}$ и $\varepsilon > 0$, существуют точки x, y из $A: d(x, y) < \varepsilon$. Это эквивалентно ⁽⁵⁾ следующему: если $d(x, x_n) \rightarrow 0$, то существует подпоследовательность $\{x_{n(k)}\} \subseteq \{x_n\}$ такая, что $d(x_{n(k)}, x_{n(k+1)}) \rightarrow 0$.

Теорема 1. G -метризуемое пространство симметризуемо симметрикой с условием (СК).

Доказательство. Пусть ρ — естественная o -метрика. Тогда ρ — удовлетворяет условию (s_1) (лемма 1). Потому топология X порождается симметрикой d как в предложении 1. Симметрика d удовлетворяет $(сК)$ (лемма 1).

Условие (π_1) : если $\rho(x, x_n) \rightarrow 0$, $\rho(y_n, x_n) \rightarrow 0$, то $y_n \rightarrow x$ ⁽³⁾.

Теорема 2. *Всякое g -метризуемое пространство X o -метризуемо o -метрикой с условием (π_1) .*

Доказательство. Положим $V_n(x) = O_n(x) \setminus \bigcup \{O_n(y) : x \notin O_n(y)\}$
 $S_n(x) = \bigcap_{k=1}^n V_k(x)$; $\rho(x, y) = 1$, при $y \notin S_1(x)$ и $\rho(x, y) = 1/n$ при $y \in S_{n-1}(x) \setminus S_n(x)$. o -Метрика ρ порождает топологию X . Если $y \notin O_n(x)$, то $S_n(y) \cap \bigcap S_n(x) = \emptyset$, отсюда ρ удовлетворяет условию (π_1) .

Условие (K) : если Φ и F — бикомпакты и $\Phi \cap F = \emptyset$, то $\rho(F, \Phi) > 0$ ⁽²⁾.

Предложение 2. *Если пространство X o -метризуемо o -метрикой ρ с условием (π_1) , то оно симметризуемо симметрикой d : $d(x, y) = \min \{\rho(x, y), \rho(y, x)\}$.*

Предложение 3. *Пространство X , o -метризуемое o -метрикой с условием (π_1) , симметризуемо симметрикой с условием (K) .*

Следствие 1. *Всякое g -метризуемое пространство симметризуемо симметрикой с условием (K) .*

Предложение 4. *В g -метризуемом пространстве всякая локально-конечная система замкнутых множеств $\{F_\alpha\}$ продолжается (is expandable) до точечно-счетной системы открытых множеств $\{G_\alpha\}$, т. е. $F_\alpha \subseteq G_\alpha$.*

Пространство X называется металинделефовым, если любое открытое покрытие имеет точечно-счетное измельчение ⁽⁶⁾.

Теорема 3. *G -метризуемое пространство X металинделефово.*

Следствие 2. *Сепарабельное g -метризуемое пространство финально-компактно.*

Этот результат можно усилить:

Пространство X удовлетворяет второй слабой аксиоме счетности (gs -аксиоме счетности), если оно обладает счетной слабой базой ⁽¹⁾.

Теорема 4. *Сепарабельное g -метризуемое пространство удовлетворяет gs -аксиоме счетности.*

Пусть X — o -метризуемое пространство, $F \subseteq X$. Слабой окрестностью F назовем множество V такое, что для всякой точки $x \in F$ найдется $\delta > 0$: $O_\rho(x, \delta) \subseteq V$.

Предложение 5. *Всякая дискретная система замкнутых множеств в g -метризуемом пространстве X имеет дискретную систему слабых окрестностей.*

Теорема 4. *Нормальное g -метризуемое пространство X паракомпактно.*

Теорема 5. *Регулярное пространство X g -метризуемо тогда и только тогда, когда X обладает σ -дискретной слабой базой, все элементы которой замкнуты.*

Говорят ⁽⁷⁾, что X обладает слабо базисным измельчением $\{\gamma_n\}$, где γ_n — покрытие X , если

1. γ_n есть измельчение γ_{n-1} ;

2. $U \subseteq X$ открыто тогда и только тогда, когда для всякого $x \in U$ существует n : $x \in St(x, \gamma_n) \subseteq U$.

Теорема 6. *Регулярное пространство X g -метризуемо тогда и только тогда, когда оно обладает слабо базисным локально-конечным измельчением $\{\gamma_n\}$.*

Доказательство необходимости. Пусть $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ — σ -дискретная замкнутая слабая база X (теорема 5). $\omega_n = \{B : B \in \mathcal{B}_n\} \cup K_n$, где $K_n = \{x \in X : \mathcal{B}_x \cap \mathcal{B}_n = \emptyset\}$ $\gamma_n = \bigcap_{k=1}^n \omega_k$. Последовательность $\{\gamma_n\}$ искомая.

Следствие 3. *Всякое g -метризуемое пространство является факторным бикompактным образом некоторого метризуемого пространства.*

Следствие 3 выводится из теоремы 6 и следующей теоремы.

Теорема 7. *T_1 -пространство X является факторным бикompактным образом некоторого метризуемого пространства тогда и только тогда, когда оно обладает слабо базисным точечно-конечным измельчением.*

По аналогии определения слабой полноты для симметризуемых пространств ⁽⁸⁾, скажем, что o -метризуемое пространство (X, ρ) слабо полно, если для всякой невозрастающей последовательности замкнутых множеств $\{M_n\}$ такой, что существует $x_n \in M_n$, $M_n \subseteq O_\rho(x_n, 1/n)$ следует, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \neq \emptyset$.

Пусть ρ — естественная o -метрика g -метризуемого пространства X .

Теорема 8. *G -метризуемое пространство (X, ρ) метризуемо, если оно слабо полно.*

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького
Свердловск

Поступило
15 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ F. Siwiec, Pacific J. Math., v. 52, N 1, 233 (1974). ² А. В. Архангельский, УМН, т. 21, № 4, 133 (1966). ³ С. И. Недев, Тр. Московск. матем. общ., т. 24, 201 (1971).
⁴ А. В. Архангельский, ДАН, т. 164, № 2, 247 (1965). ⁵ С. И. Недев, М. М. Чобан, Вестн. МГУ, сер. матем., мех., № 2 (1972). ⁶ С. I. R. Borges, Canad. J. Math., v. 20, N 4, 795 (1968). ⁷ Н. В. Величко, Матем. заметки, т. 12, № 5, 577 (1972). ⁸ R. W. Heath, Pacific J. Math., v. 12, № 4, 1301 (1962).