

УДК 513.831

МАТЕМАТИКА

А. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ТОПОЛОГИЙ И ПСЕВДООТКРЫТЫЕ БИКОМПАКТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

(Представлено академиком П. С. Александровым 8 X 1975)

В этой заметке псевдооткрытые бикомпактные отображения применяются к изучению топологий, которые возникают в результате пересечения конечных семейств метризуемых топологий. Один из главных результатов — теорема 2. Из нее следует, что в широких предположениях пересечение обладает равномерной базой или даже метризуемо. Средством доказательства теоремы 2 является теорема 1, которая по новому освещает соотношение между классом метрических пространств и классом пространств с равномерной базой.

Основной в техническом отношении шаг — доказательство предложения 1.

Терминология и обозначения — такие как в ^(1, 4). Имеются в виду только T_1 -пространства. Через N^+ обозначается множество всех положительных целых чисел.

Предложение 1. Если $f: X \rightarrow Y$ — непрерывно псевдооткрытое бикомпактное отображение метрического пространства X на пространство Y , то Y слабо паракомпактно (точечно-паракомпактно).

Доказательство. Пространство Y симметризуемо ^(1, 9), обладает точечно-счетной базой ⁽²⁾, и потому в Y есть счетное измельчающееся семейство открытых покрытий ⁽³⁾. Поэтому в Y имеется и σ -дискретная сеть из замкнутых множеств ⁽⁴⁾ и, следовательно, каково бы ни было открытое покрытие γ пространства Y , в γ можно вписать такое покрытие $\sigma^* = \bigcup \{\sigma_i: i \in N^+\}$, что каждое σ_i является дискретным (в Y) семейством замкнутых множеств. Мы фиксируем для дальнейшего γ и σ^* .

Пусть $\sigma_i = \{P_{i, \alpha}: \alpha \in A_i\}$. Положим $F_{i, \alpha} = f^{-1}(P_{i, \alpha})$ и $\theta_i = \{F_{i, \alpha}: \alpha \in A_i\}$. Семейство θ_i дискретно в X и состоит из замкнутых в X множеств. Положим $\theta = \bigcup \{\theta_i: i \in N^+\}$. Ясно, что $\bigcup \theta = X$ и что θ вписано в открытое покрытие $\lambda = \{f^{-1}(V): V \in \gamma\}$ пространства X .

Так как X коллективно нормально, для каждого $i \in N^+$ существует дискретное семейство $\bar{\theta}_i = \{U_{i, \alpha}: \alpha \in A_i\}$ открытых множеств в X , вписанное в λ и такое, что $U_{i, \alpha} \supset F_{i, \alpha}$, при всех $\alpha \in A_i$.

Положим $W_{i, \alpha} = \text{Int}(f(U_{i, \alpha}))$. Так как f псевдооткрыто, $W_{i, \alpha} \supset P_{i, \alpha}$ при всех $i \in N^+$ и $\alpha \in A_i$. Пусть y — произвольная точка пространства Y . По условию, $f^{-1}(y)$ — бикомпакт. Отсюда и из дискретности семейства $\bar{\theta}_i$ в X следует, что множество $\{U \in \bar{\theta}_i: U \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset\}$ конечно. Значит, семейство $\{f(U_{i, \alpha}): \alpha \in A_i\}$ и, тем более, семейство $\bar{\theta}_i = \{W_{i, \alpha}: \alpha \in A_i\}$ точечно-конечны.

Мы полагаем $\bar{\sigma} = \bigcup \{\bar{\theta}_i: i \in N^+\}$. Имеем $\bigcup \bar{\sigma} \supset \bigcup \sigma^* = Y$. Так как $\bar{\theta}$ вписано в λ , $\bar{\sigma}$ вписано в γ .

Заметим теперь, что в Y каждое замкнутое множество P имеет тип G_δ и, следовательно, каждое открытое множество имеет тип F_σ . Действительно, $Q = f^{-1}(P)$ замкнуто в X и, так как f — отображение на, $f(Q) = P$. Множество Q — типа G_δ в X . Зафиксируем семейство $\mu = \{E_i: i \in N^+\}$ открытых в X множеств такое, что $\bigcap \mu = Q$ и $[E_{i+1}] \subset E_i$ при всех $i \in N^+$. Положим $M_i = \text{Int}(f(E_i))$ и $\eta = \{M_i: i \in N^+\}$. Из псевдооткрытости f и соотношения $f(X) = Y$ следует, что $\bigcap \eta \supset P$. Покажем, что если $y^* \notin P$, то $y^* \notin \bigcap \eta$.

Из $f(Q) = P \subset Y \setminus \{y^*\}$ следует, что $f^{-1}(y^*) \cap (\cap \mu) = \Lambda$. Так как $[E_{i+1}] \subset E_i$, имеем

$$\Lambda = \cap \{E_i \cap f^{-1}(y^*) : i \in N^+\} = \cap \{[E_i] \cap f^{-1}(y^*) : i \in N^+\}.$$

Семейство $\{[E_i] \cap f^{-1}(y^*) : i \in N^+\}$ является цепью замкнутых множеств в бикомпакте $f^{-1}(y^*)$. Так как пересечение этой цепи пусто, некоторый ее элемент пуст. Итак, существует $i^* \in N^+$, для которого $[E_{i^*}] \cap f^{-1}(y^*) = \Lambda$. Тогда $E_{i^*} \cap f^{-1}(y^*) = \Lambda$ и потому $f(E_{i^*}) \neq y^*$. Тем более, $M_{i^*} \neq y^*$. Следовательно, $y^* \notin \cap \eta$ и $\cap \eta = P$.

Итак, каждое открытое в Y множество имеет тип F_σ .

Теперь, отправляясь от уже построенного ранее σ -точечно-конечного открытого покрытия $\bar{\sigma} = \cup \{\bar{\sigma}_i : i \in N^+\}$, вписанного в γ , мы построим точечно-конечное открытое покрытие, вписанное в $\bar{\sigma}$.

Положим $G_i = \cup \bar{\sigma}_i$. Зафиксируем семейство $\xi_i = \{\Phi_{i,n} : n \in N^+\}$ замкнутых в Y множеств такое, что $\cup \xi_i = G_i$ и $\Phi_{i,n+1} \supset \Phi_{i,n}$. Положим далее $W'_{i,\alpha} = W_{i,\alpha} \setminus (\cup \{\Phi_{k,i} : k < i\})$ (если $i=1$, то $W'_{i,\alpha} = W_{i,\alpha}$), $\sigma'_i = \{W'_{i,\alpha} : \alpha \in A\}$ и $\sigma' = \cup \{\sigma'_i : i \in N^+\}$.

Проверим, что $\cup \sigma' = Y$. Зафиксируем произвольно $y^* \in Y$ и положим $i^* = \min \{i \in N^+ : G_i \ni y^*\}$. Существует $\alpha^* \in A$, для которого $W_{i^*,\alpha^*} \ni y^*$. Так как $\cup \{\Phi_{k,i^*} : k < i^*\} \subset \cup \{G_k : k < i^*\}$ и $G_k \neq y^*$, если $k < i^*$, мы получаем $y^* \in W'_{i^*,\alpha^*} \in \sigma'$. Значит, $y^* \in \cup \sigma'$, т. е. $\cup \sigma' = Y$. Все элементы семейства σ' — открытые множества. Далее, σ' вписано в $\bar{\sigma}$, а так как $\bar{\sigma}$ вписано в γ , то и σ' вписано в γ .

Таким образом, σ' — открытое покрытие пространства Y , вписанное в γ . Покажем, что σ' точечно-конечно. Выберем произвольно $\tilde{y} \in Y$. Существуют $\tilde{i} \in N^+$ и $\tilde{n} \in N^+$, для которых $\tilde{y} \in \Phi_{\tilde{i},\tilde{n}}$. Тогда если $k > \max\{\tilde{i}, \tilde{n}\}$, то $\tilde{y} \in \Phi_{\tilde{i},\tilde{n}} \subset \Phi_{k,k} \subset \cup \{\Phi_{i,k} : i < k\}$ и потому $\tilde{y} \notin W'_{k,\alpha}$. Следовательно, $\tilde{y} \notin \cup \sigma'_k$ при всех $k > \max\{\tilde{i}, \tilde{n}\}$. Но семейство σ'_i точечно-конечно при каждом $i \in N^+$, ибо оно комбинаторно вписано в точечно-конечное семейство $\bar{\sigma}_i$. Значит и $\cup \{\sigma'_i : i \leq \max\{\tilde{i}, \tilde{n}\}\}$ точечно-конечно.

Так как, по доказанному, все элементы семейства σ' , содержащие точку $\tilde{y}$, находятся в $\cup \{\sigma'_i : i \leq \max\{\tilde{i}, \tilde{n}\}\}$, $\tilde{y}$ принадлежит лишь конечному множеству элементов семейства σ' , т. е. σ' точечно-конечно. Предложение 1 доказано.

Теорема 1. *Пространства с равномерной базой и только они являются образами метрических пространств при непрерывных псевдооткрытых бикомпактных отображениях.*

Доказательство. Образ метрического пространства при непрерывном псевдооткрытом бикомпактном отображении обладает измельчением (см. ^(1,4)) и, в силу предложения 1, является слабо паракомпактным пространством. В образе выполняется также T_1 -аксиома отделимости. Так как каждое слабо паракомпактное пространство с измельчением обладает равномерной базой ⁽⁵⁾, достаточность условия теоремы 1 следует. В то же время, известна необходимость даже более сильного условия: каждое T_1 -пространство с равномерной базой представимо, как образ метрического пространства при непрерывном открытом бикомпактном отображении ⁽⁶⁾. Теорема 1 доказана.

Вопрос 1. Верно ли, что образ паракомпакта при непрерывном псевдооткрытом бикомпактном отображении слабо паракомпактен?

Пусть X — множество, $\mathcal{T}$ — топология на X и $A \subset X$. Условимся временно, до конца этой заметки, через $[A]_{\mathcal{T}}$ обозначать замыкание множества A в пространстве $(X, \mathcal{T})$.

Определение 1. Пусть X — множество и λ — конечное семейство топологий на X . Скажем, что λ согласовано*, если для каждого $A \subset X$, $[A]_{\cap \lambda} = \cup \{[A]_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \in \lambda\}$.

* В случае бесконечного семейства топологий их согласованность следует определять более сильным требованием бифакторности.

Легко доказываются следующие два утверждения.

Предложение 2. Конечное семейство λ топологий на X согласовано в том и только том случае, если каноническое отображение свободной топологической суммы $\Sigma\{(X, \mathcal{T}): \mathcal{T} \in \lambda\}$ на пространство $(X, \Pi\lambda)$ (см., например, ⁽⁷⁾, стр. 132) псевдооткрыто.

Предложение 3. Конечное семейство λ топологий на X согласовано в том и только том случае, если для каждого $A \subset X$, $(\Pi\lambda)|_A = \Pi\{\mathcal{T}|_A: \mathcal{T} \in \lambda\}$ (где $\mathcal{T}|_A$ обозначает сужение топологии $\mathcal{T}$ на A , т. е. семейство $\{U \cap A: U \in \mathcal{T}\}$).

Теорема 2. Пусть λ — конечное согласованное семейство топологий на X такое, что для каждого $\mathcal{T} \in \lambda$, $(X, \mathcal{T})$ — пространство с равномерной базой. Тогда и $(X, \Pi\lambda)$ — пространство с равномерной базой.

Доказательство. Каноническое отображение $\pi: \Sigma\{(X, \mathcal{T}): \mathcal{T} \in \lambda\} \rightarrow (X, \Pi\lambda)$ конечнократно, псевдооткрыто и непрерывно. Пространство $\Sigma\{(X, \mathcal{T}): \mathcal{T} \in \lambda\}$, как свободная топологическая сумма пространств с равномерной базой, само является пространством с равномерной базой. Поэтому оно представимо в виде образа метрического пространства при непрерывном псевдооткрытом (даже открытом) бикompактном отображении. Но композиция бикompактного псевдооткрытого отображения и конечнократного псевдооткрытого отображения всегда является псевдооткрытым бикompактным отображением. Значит, пространство $(X, \Pi\lambda)$ — образ метрического пространства при непрерывном псевдооткрытом бикompактном отображении. Из теоремы 1 следует теперь, что $(X, \Pi\lambda)$ — пространство с равномерной базой. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Пересечение двух согласованных метризуемых топологий может не быть метризуемой топологией — такова топология в примере Бинга (см. ⁽⁸⁾).

Замечание 2. Пересечение двух несогласованных метризуемых топологий может не обладать равномерной базой, даже удовлетворяя всем требованиям отделимости, — такова топология пространства, описанного В. П. Золотаревым.

Замечание 3. Пересечение конечного согласованного семейства топологий с точечно-счетной базой является топологией с точечно-счетной базой. Это легко следует из результатов В. В. Филиппова ⁽²⁾.

Вопрос 2. Верно ли, что пересечение двух (хаусдорфовых, регулярных, вполне регулярных) согласованных топологий со счетным измельчением является топологией со счетным измельчением?

Вопрос 3. Верно ли, что пересечение двух (хаусдорфовых, регулярных, вполне регулярных) согласованных топологий с σ -дизъюнктивной базой обладает σ -дизъюнктивной базой?

Вопрос 4. Пусть $(X, \mathcal{T})$ — нормальное пространство с первой аксиомой счетности, топология которого является пересечением двух метризуемых топологий (тогда последние автоматически согласованы — см. ⁽⁹⁾!). Верно ли, что тогда $(X, \mathcal{T})$ метризуемо?

В связи с вопросом 4 уместно иметь в виду такие два следствия теоремы 2.

Следствие 1. Если X — пространство Фреше — Урысона, топология которого является пересечением конечного семейства топологий с равномерной базой, то и X обладает равномерной базой.

Следствие 2. Если X — коллективно-нормальное пространство Фреше — Урысона, топология которого является пересечением конечного семейства метризуемых топологий, то X метризуемо.

Замечание 4. Чтобы вывести первое утверждение из теоремы 2, достаточно заметить, что факторное отображение на пространство Фреше — Урысона всегда псевдооткрыто (см. ⁽⁹⁾). При доказательстве второго утверждения мы дополнительно ссылаемся на известную теорему П. С. Александрова из ⁽⁵⁾: каждое коллективно-нормальное пространство с равномерной базой метризуемо. Если в формулировках следствия 1 и

следствия 2 требование Фреше-урисоновости заменить на более слабое требование секвенциальности, заключения перестают быть верными.

Теорема 2'. Пусть $(X, \mathcal{T})$ — некоторое пространство и $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ — семейство пространств с равномерной базой, причем:

- 1) $\cup \{X_\alpha : \alpha \in A\} = X$;
- 2) $\mathcal{T} \upharpoonright X_\alpha \subset \mathcal{T}_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$;
- 3) множество $A_x = \{\alpha \in A : X_\alpha \ni x\}$ конечно для каждого $x \in X$;
- 4) если $A_x = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ и $x \in U_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_{\alpha_i}$ для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$, то $\cup \{U_{\alpha_i} : i = 1, \dots, k\}$ является окрестностью точки x в $(X, \mathcal{T})$.

Тогда и $(X, \mathcal{T})$ обладает равномерной базой.

Доказательство теоремы 2' получается простой модификацией доказательства теоремы 2.

Следствие 3. Если X — пространство Фреше — Урысона и его топология является слабой топологией (см. (7), стр. 132), порожденной точечно-конечным покрытием пространства X подпространствами с равномерной базой, то и X обладает равномерной базой.

Это утверждение непосредственно следует из теоремы 2'.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Архангельский, УМН, т. 21, в. 4 (130), 133 (1966). ² В. В. Филиппов, Матем. сб., т. 80 (122), в. 4, 521 (1969). ³ R. W. Heath, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math., v. 13, 393 (1965). ⁴ A. Arhangel'skij, Proc. Int. Congr. Math., Nice, v. 2, 19 (1974). ⁵ П. С. Александров, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math., v. 8, № 3, 135 (1960). ⁶ А. В. Архангельский, ДАН, т. 145, № 2, 245 (1962). ⁷ J. Dugundji, Topology, Boston, 1966. ⁸ R. H. Bing, Canad. Math. J., v. 3, 175 (1951). ⁹ А. В. Архангельский, ДАН, т. 155, № 2, 247 (1974).