

УДК 517.929

МАТЕМАТИКА

А. Г. КАМЕНСКИЙ

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком Г. И. Петровым 26 VI 1975)

В работе изучаются спектры самосопряженных сужений формально симметричных дифференциально-разностных операторов второго порядка. Полученные результаты применяются для изучения проблемы положительности квадратичного функционала с отклонением, которая возникает в вариационных задачах для функционалов с отклоняющимся аргументом (см. (1)).

1. Пусть $a, h, c_v, v=0, 1, \dots, n$, — вещественные числа, причем $0 < h < a$, $n = [ah^{-1}]$. Рассмотрим в пространстве $L_2(0, a)$ суммируемых с квадратом комплексных функций, определенных на отрезке $[0, a]$, разностный оператор R , определяемый формулой

$$Rx(t) = \sum_{v=0}^n c_v (x(t+vh) + x(t-vh)). \quad (1)$$

Здесь и далее мы полагаем

$$x(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad \tau \notin [0, a].$$

Для каждой пары $i, j \geq 1$ положим $c_{ij} = c_{|i-j|}$, если $|i-j| \leq n$, и $c_{ij} = 0$, если $|i-j| > n$; обозначим C^l ($l \times l$)-матрицу с элементами c_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, l$. Пусть k — ближайшее справа к ah^{-1} целое число, т. е. $k = n$, если $a = nh$, и $k = n+1$, если $a > nh$.

Предложение 1. Оператор R симметричен, а его спектр совпадает с объединением спектров матриц C^n и C^k . Оператор R обратим тогда и только тогда, когда $\det C^n \cdot \det C^k \neq 0$.

Обозначим D оператор дифференцирования, $Dx(t) = x'(t)$, и пусть H — пространство, состоящее из таких абсолютно непрерывных функций на $[0, a]$, для которых $Dx \in L_2(0, a)$. Положим

$$H_0 = \{x \in H \mid x(0) = x(a) = 0\}, \quad H_0^0 = \{x \in H_0 \mid Dx \in H_0\}, \\ K = \{x \in L_2(0, a) \mid Rx \in H\}, \quad K_0 = K \cap H_0.$$

Определим оператор B в $L_2(0, a)$ с областью определения K формулой

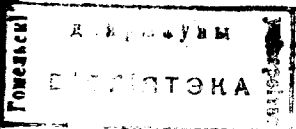
$$Bx(t) = D^2 Rx(t) = \sum_v c_v (x(t+vh) + x(t-vh))''.$$

Отметим, что пространство K почти всегда содержит разрывные функции. Пусть B_0 — ограничение оператора B на пространство H_0^0 .

Предложение 2. Оператор B_0 симметричен; $B_0^* = B_0$.

Теорема 1. Если оператор R необратим, то оператор B — самосопряженный оператор, $B^* = B$. Если же оператор R обратим, то область определения K оператора B принадлежит множеству кусочно дважды дифференцируемых функций и

$$(Bx, y) - (x, By) = T(Dx, y) - T(x, Dy),$$



где

$$T(u, v) = \delta l_0(u) \overline{l_0(v)} + \beta (l_0(u) \overline{m_a(v)} + m_a(u) \overline{l_0(v)}) + \gamma m_a(u) \overline{m_a(v)};$$

здесь δ, β, γ — вещественные числа, причем $\delta\gamma - \beta^2 \neq 0$, а функционалы l_0 и m_a непропорциональны и определяются формулами

$$l_0(u) = u^+(0), \quad m_a(u) = RJu(a),$$

где оператор J задается равенством

$$Ju(t) = u^+(t) - u^-(t).$$

З а м е ч а н и е. Фактически, если оператор R обратим, всякая функция $x \in K$ может иметь разрывы (причем только первого рода) лишь на множестве

$$\mathfrak{N} = \{vh | v=0, 1, \dots, n\} \cup \{a-vh | v=0, \dots, n\};$$

это же справедливо для функции Dx .

Пусть B_1 — ограничение оператора на пространство K_0 .

Теорема 2. Если оператор R обратим, то оператор B_1 — самосопряженный оператор.

Теорема 3. Если оператор R обратим, то спектр оператора B_1 состоит из счетного числа собственных значений конечной кратности $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, причем ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{-1}$ сходится. Если оператор R необратим, то спектр оператора B состоит из точки 0 — собственного значения бесконечной кратности и последовательности ненулевых собственных значений конечной кратности $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ причем ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{-1}$ сходится.

2. Пусть $\sigma_i, \gamma_i, i=1, \dots, m$, — монотонные вещественные функции, определенные на всей вещественной прямой, такие, что γ_i является обратной для σ_i , и такие, что их производные удовлетворяют условию Липшица. Пусть a_i, b_i — вещественные функции на отрезке $[0, a]$, причем a_i измеримы и ограничены, а b_i удовлетворяют условию Липшица, $i=1, \dots, m$. Определим операторы U и V с областями определения H_0 и $L_2(0, a)$, соответственно, равенствами

$$Ux(t) = \sum_{i=1}^m b_i(t) x'(\sigma_i(t)) + a_i(t) x(\sigma_i(t)), \quad (2)$$

$$Vx(t) = \sum_{i=1}^m a_i(t) x(\sigma_i(t));$$

здесь, как и выше, следует полагать

$$x(\sigma_i(t)) = 0 \quad \text{при} \quad \sigma_i(t) \notin [0, a].$$

Положим

$$U^x x(t) = - \sum_i [b_i(\gamma_i(t)) \gamma_i'(t) x(\gamma_i(t))] + a_i(\gamma_i(t)) \gamma_i'(t) x(\gamma_i(t)).$$

Если $x, y \in H_0$, то $(Ux, y) = (x, U^x y)$, где $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в $L_2(0, a)$. Назовем оператор U формально симметричным, если $U^x = U$. Оператор V ограничен и сопряженный к нему задается равенством

$$V^x x(t) = \sum a_i(\gamma_i(t)) \gamma_i'(t) x(\gamma_i(t)).$$

Теорема 4. Если оператор R обратим, а оператор U формально симметричен, то оператор $F = -B_1 + U$ с областью определения K_0 — самосопряженный оператор, а его спектр представляет собой счетное множество соб-

ственных значений конечной кратности $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, причем ряд $\sum |\lambda_i|^{-1}$ сходится; резольвента F является ядерным оператором.

Теорема 5. Если оператор R необратим, а оператор V симметричен, то оператор $G=B+V$ является самосопряженным оператором, его непрерывный спектр принадлежит отрезку $[-\|V\|, \|V\|]$, а спектр, не принадлежащий этому отрезку, представляет собой множество собственных значений конечной кратности $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, причем ряд $\sum |\lambda_i|^{-1}$ сходится. Если функции a_i принадлежат пространству H вместе со своими производными, то оператор G обладает полной системой обобщенных собственных функций порядка сингулярности не более 2.

3. Рассмотрим на пространстве H_0 квадратичный функционал

$$J(x) = \int_0^a dt \left[\sum_{v=-n}^n g_v x'(t) x'(t-vh) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^m e_i(t) x(t) x'(\sigma_i(t)) + f_i(t) x(\sigma_i(t)) x(t) \right],$$

где g_v — вещественные числа, а функции e_i и f_i удовлетворяют тем же условиям, что b_i и a_i соответственно. Существует (единственный) оператор F вида

$$F = -D^2 R + U,$$

где R — оператор вида (1), а U — формально симметричный оператор вида (2) такой, что

$$J(x) = (Fx, x) \quad \text{для всех } x \in H_0^0.$$

Пусть d — фиксированное вещественное число и $a \in (0, d]$. Предположим, что функции e_i и f_i заданы на всем отрезке $[0, d]$ и обладают указанными выше свойствами. Чтобы подчеркнуть зависимость функционала J и оператора F от a , будем писать J_a и F_a вместо J и F соответственно. Назовем точку a сопряженной с точкой 0, если оператор F_a не инъективен, т. е. если найдется такое $x \neq 0$, что $F_a x = 0$. Пусть s — ближайшее к dh^{-1} справа целое число.

Теорема 6. Если функционал J_a неотрицателен, то матрица C^s неотрицательно определена.

Теорема 7. Если матрица C^s положительно определена, то следующие условия эквивалентны:

- (I) На отрезке $[0, d]$ нет точек, сопряженных с точкой 0;
- (II) $J_a(x) > 0$ при $x \neq 0$;
- (III) $J_a(x) \geq k(x, x)$ при некотором $k > 0$;
- (IV) $J_a(x) \geq k(x', x')$ при некотором $k > 0$.

Поступило
17 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. А. Каменский, Межвузовск. сб.: Динамика систем, в. 7, Горький, 1975.