

С. В. КИСЛЯКОВ

ОБ УСЛОВИЯХ ДАНФОРДА — ПЕТТИСА, ПЕЛЧИНСКОГО
И ГРОТЕНДИКА

(Представлено академиком А. Д. Александровым 17 VI 1975)

В этой заметке содержится новая информация о том, какие из «классических» банаховых пространств удовлетворяют условиям Данфорда — Петтиса, Пелчинского и Гротендика. Напомним, в чем заключаются эти условия.

1. Банахово пространство X удовлетворяет условию Данфорда — Петтиса, если всякий слабо компактный оператор $T: X \rightarrow Y$ переводит слабо компактные множества в множества, компактные по норме (или, что то же самое, переводит слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся).

2. X удовлетворяет условию Пелчинского, если всякий безусловно суммирующий * оператор $T: X \rightarrow Y$ слабо компактен.

3. X удовлетворяет условию Гротендика, если в X^* всякая $\sigma(X^*, X)$ -сходящаяся последовательность сходится слабо (в этой работе слабой топологией в банаховом пространстве Y называется топология $\sigma(Y, Y^*)$, даже если само Y сопряжено к некоторому банахову пространству Z).

Подробную информацию об этих условиях можно найти в ⁽¹⁾, глава 9, ⁽²⁾ и ⁽³⁾. В частности, там доказано, что условие Пелчинского выполнено для пространств $C(S)$; условие Данфорда — Петтиса — для пространств $C(S)$ и $L^1(\mu)$; а условие Гротендика — для пространств $L^\infty(\mu)$, где μ — σ -конечная мера.

Нам понадобится следующая

Лемма 1. а). Пусть X — банахово пространство. Если множество $K \subset X^*$ слабо относительно компактно, то оно обладает следующим свойством:

$$\limsup_n \{ |f(x_n)| : f \in K \} = 0 \quad \text{для всякой с.п. } \{x_n\} \subset X. \quad (*)$$

б). Пространство X удовлетворяет условию Пелчинского в том и только в том случае, если всякое множество $K \subset X^*$, обладающее свойством (*), слабо относительно компактно.

Первую часть этой леммы легко вывести из того, что в пространстве l^1 все слабо компактные множества сильно компактны; вторая часть доказана в ⁽³⁾.

Мы будем использовать следующие обозначения: m — нормированная мера Лебега на окружности Γ ; $L^p = L^p(m)$; $C = C(\Gamma)$; $M = M(\Gamma) = C^*$; A , H^∞ и H^1 — подпространства пространств C , L^∞ и L^1 соответственно, состоящие из функций, у которых коэффициенты Фурье с отрицательными номерами равны нулю; $\mathfrak{M}$ — пространство максимальных идеалов банаховой алгебры L^∞ ; m_1 — мера на $\mathfrak{M}$, соответствующая функционалу $\varphi \in (L^\infty)^*$, определяемому формулой $\varphi(f) = \int f dm$.

* Оператор T называется безусловно суммирующим, если для всякой суммируемой последовательности (с.п.) $\{x_n\} \subset X$ ряд $\sum T x_n$ безусловно сходится. Напомним, что последовательность $\{x_n\}$ называется суммируемой, если $\sum |f(x_n)| < \infty$ для всех $f \in X^*$. Легко понять, что последовательность $\{x_n\} \subset C(S)$ суммируема тогда и только тогда, когда $\sup \{ \sum |x_n(s)| : s \in S \} < \infty$.

Сформулируем теперь наши основные результаты.

Теорема 1. (I). Пространства A , A^* , H^∞ , $(H^\infty)^*$ и L^1/H_0^1 удовлетворяют условию Данфорда — Петтиса*.

(II). Пространства A и H^∞ удовлетворяют условию Пелчинского.

(III). Пространство H^∞ удовлетворяет условию Гротендика.

Следствие 1. а). Пусть X — бесконечномерное подпространство пространства A (или H^∞). Если X не содержит подпространства, изоморфного c_0 , то X не дополняемо в A (в H^∞).

б). В A^* , $(H^\infty)^*$, L^1/H_0^1 нет бесконечномерных дополняемых рефлексивных подпространств.

в). Всякое сепарабельное фактор-пространство пространства H^∞ рефлексивно; никакое бесконечномерное сепарабельное подпространство пространства H^∞ не дополняемо в H^∞ .

Следствие 2. Не существует банахова пространства, сопряженного к которому изоморфно L^1/H_0^1 .

Эти следствия доказываются так же, как и аналогичные утверждения о $C(S)$, $L^1(\mu)$ и $L^\infty(\mu)$ (см. (3), лемма 4 и предложение 3; (2), стр. 169; (1), стр. 879; (5), теорема 2.1).

Теорему 1 легко вывести из теоремы 2, леммы 1 и следующих утверждений: 1) если пространство X^* удовлетворяет условию Данфорда — Петтиса, то такого же и X ((1), стр. 875); 2) если пространство X^* удовлетворяет условию Пелчинского, то оно удовлетворяет условию Гротендика (это нетрудно получить из того, что l^∞ удовлетворяет условию Гротендика, и леммы 1).

Теорема 2. Пусть $K \subset A^*$ ($K \subset (H^\infty)^*$).

а). Для того чтобы множество K было слабо относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало свойством (*).

б). Если K — счетное слабо относительно компактное множество, то оно является образом некоторого слабо относительно компактного множества при каноническом отображении M на A^* ($(L^\infty)^*$ на $(H^\infty)^*$).

Замечание. Близкий результат о слабой компактности в пространстве L^1/H_0^1 получен М. Г. Голузиной (неопубликовано) и Ж. Шома (6). Он заключается в следующем: ограниченное множество $K \subset L^1/H_0^1$ слабо относительно компактно тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $g \in H^\infty$, $\|g\|_{H^\infty} \leq 1$ и $\|g\|_{L^1} \leq \delta$, то

$$\sup \{ |\langle x, g \rangle| : x \in K \} \leq \varepsilon.$$

Доказательству теоремы 2 мы предположим несколько лемм.

Лемма 2. Существуют два семейства функций из $A - \{K_\varepsilon\}$ и $\{k_\varepsilon\}$ (ε пробегает все замкнутые подмножества окружности положительной лебеговой меры), — удовлетворяющие следующим условиям:

$$1) |K_\varepsilon(t)| + |k_\varepsilon(t)| = 1, \quad t \in \Gamma;$$

$$2) \lim_{m(e) \rightarrow 0} \sup_{t \in e} |k_\varepsilon(t) - 1| = 0, \quad \lim_{m(e) \rightarrow 0} \int |K_\varepsilon| dm = 0;$$

$$3) \lim_{m(e) \rightarrow 0} \sup_{t \in e} |k_\varepsilon(t)| = 0, \quad \lim_{m(e) \rightarrow 0} \int |k_\varepsilon - 1| dm = 0.$$

Доказательство этой леммы повторяет с небольшими изменениями доказательство леммы 2 в (8).

Лемма 3. Пусть S — компакт, $\{\mu_n\}$ — ограниченная последовательность в $M(S)$. Тогда найдутся попарно непересекающиеся замкнутые множества $e_1, e_2, \dots$ и последовательность индексов $n_1 < n_2 < \dots$ такие, что меры $\lambda_i = \chi_{S \setminus e_i} \cdot \mu_{n_i}$ образуют слабо относительно компактное множество.

Эту лемму легко доказать, используя классический критерий слабой компактности в пространстве мер. Подробности см., например, в (7) (доказательство теоремы 6).

Лемма 4. Пусть S — компакт, B — замкнутая подалгебра алгебры $C(S)$, λ — положительная мера Радона на S . Предположим, что для каж-

* $H_0^1 = \{f \in H^1 : \int f dm = 0\}$.

дой μ , сингулярной относительно λ , и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое множество пика* e для B , что $\lambda(e) = 0$ и $\|\mu\| - |\mu|(e) < \varepsilon$. Пусть $\{\mu_n\}$ — ограниченная последовательность мер, абсолютно непрерывных относительно λ ; ν — ее предельная точка в топологии $\sigma(M(S), C(S))$. Если сингулярная часть μ меры ν относительно λ не аннулирует B , то существует такая с.п. $\{f_k\}$ в B , что

$$\overline{\lim}_k \sup_n \left| \int f_k d\mu_n \right| > 0.$$

Условиям этой леммы удовлетворяют, например, алгебра A (S — окружность, $\lambda = m$; см. ⁽⁴⁾, стр. 116–117) и алгебра H^∞ ($S = \mathbb{M}$, $\lambda = m$; см. ⁽⁹⁾). Доказательство основано на конструкции из ⁽¹⁰⁾: можно положить $f_k = (h^{n_{k+1}} - h^{n_k})g$, где функция $g \in B$ выбрана так, что $\int g d\mu \neq 0$, $h \in B$ имеет пик на множестве e , удовлетворяющем условиям $\lambda(e) = 0$, $\int g d\mu \neq 0$, а на-

туральные числа n_k растут достаточно быстро. Подробности для случая алгебры H^∞ см. в ⁽⁶⁾, стр. 4–7.

Лемма 5. Пусть $\{\Phi_n\}$ — ограниченная последовательность в A^* (в $(H^\infty)^*$). Предположим, что существуют такие функции $g_n \in A$ ($g_n \in H^\infty$), что $\|g_n\| = 1$ и $\Phi_n(g_n) = \|\Phi_n\|$. Пусть σ_n — мера на окружности (на $\mathbb{M}$), получающаяся после продолжения функционала Φ_n на C (на L^∞) с сохранением нормы, $\mu_n = g_n \cdot \sigma_n$. Если меры μ_n не образуют слабо относительно компактное множество в M (в $M(\mathbb{M})$), то найдется такая с.п. $\{h_k\}$ в A (в H^∞), что

$$\overline{\lim}_k \sup_n |\Phi_n(h_k)| > 0.$$

Сначала мы докажем эту лемму для пространства A . Ясно, что $\mu_n \geq 0$; пусть $\mu_n = y_n \cdot m + \lambda_n$, где меры λ_n сингулярны относительно m . Если последовательность $\{\lambda_n\}$ не является слабо относительно компактной, то существуют такие открытые множества G_k , замкнутые множества $F_k \subset G_k$ и число $r > 0$, что $m(F_k) = 0$, и для некоторой последовательности $n_1 < n_2 < \dots$ выполнены неравенства $\lambda_{n_k}(F_k) > r$ (⁽⁴⁾, стр. 389); поэтому можно положить $h_k = f_k^{j_k} g_{n_k}$, где f_k — функция из A , имеющая пик на F_k , а числа j_k настолько велики, что $|\int f_k^{j_k} d\mu_{n_k}| \geq r/2$ и $\sum |f_k^{j_k}(t)| \leq 2$ при всех t . Пусть теперь последовательность $\{\lambda_n\}$ слабо относительно компактна. В силу леммы 3 мы можем считать, что $y_n = x_n + z_n$, где функции $x_n \in L^1$ образуют слабо относительно компактное множество, $z_n = y_n \cdot \chi_{e_n}$ (множества $e_1, e_2, \dots$ попарно не пересекаются и замкнуты) и $\int z_n dm > \delta > 0$ при всех n . Из первой части леммы 1 вытекает, что достаточно построить такую с.п. $\{f_s\}$ в A , что

$$\overline{\lim}_s \sup_n \left| \int z_n f_s dm \right| > 0.$$

Будем считать, что $z_n m \rightarrow \lambda$ в топологии $\sigma(M, C)$. Тогда $\lambda \neq 0$, поскольку $\|\lambda\| = \int d\lambda = \lim \int z_n dm \geq \delta$. Пусть $\lambda = u \cdot m + \rho$, где мера ρ сингулярна относительно m . Если $\rho \neq 0$, то ρ не аннулирует A (так как $\|\rho\| = \int 1 d\rho$), и можно применить лемму 4. Предположим, что $\rho = 0$. Пусть $a = \int u dm$. Можно считать, что при всех n $|\|z_n m\| - \|um\|| = |\int (z_n - u) dm| < 2^{-1}a$. Положим $K_n = K_{e_n}$, $k_n = k_{e_n}$ (см. лемму 2). Воспользовавшись тем, что $\lim \int f k_n dm = \int f dm$ при $f \in L^1$, $\lim \int g z_n dm = \int g u dm$ при $g \in C$ и $\limsup_{t \in e_n} |K_n(t) - 1| = 0$, нетрудно

* e есть множество пика для B , если найдется такая функция $f \in B$, что $f(t) = 1$ при $t \in e$ и $|f(t)| < 1$ при $t \notin e$.

построить такую последовательность $n_1 < n_2 < \dots$, что:

$$\left| \int \left(\prod_{j=1}^s k_{n_j} \right) u \, dm - \int u \, dm \right| < 2^{-2} a (2^{-1} + \dots + 2^{-s}), \quad s=1, \dots, 2, \dots; \quad (1)$$

$$\left| \int \left(\prod_{j=1}^s k_{n_j} \right) (u - z_{n_{s+1}}) \, dm \right| < 2^{-3} a, \quad s=1, 2, \dots; \quad (2)$$

$$|K_{n_{s+1}}(t) - 1| < 2^{-4}, \quad t \in e_{n_{s+1}}, \quad s=1, 2, \dots \quad (3)$$

Положим $w_s = \prod_{j=1}^s k_{n_j}$, $f_s = w_s \cdot K_{n_{s+1}}$. С помощью индукции легко проверить,

что $\sum_{j=1}^s |f_j(t)| \leq |k_{n_1}(t)| - |w_{s+1}(t)|$ при всех s , поэтому $\{f_s\}$ — с.п. в A . Из (1) и (2) вытекает, что $|\int w_s z_{n_{s+1}} \, dm| > a - a(2^{-2} + 2^{-3})$. Так как функция $z_{n_{s+1}}$ сосредоточена на $e_{n_{s+1}}$, то из последнего неравенства и формулы (3) следует, что $|\int f_s z_{n_{s+1}} \, dm| \geq a - a(2^{-2} + 2^{-3}) - 2^{-4} \int z_{n_{s+1}} \, dm \geq a - a(2^{-2} + 2^{-3}) - 2^{-4}(1 + 2^{-1})a \geq 2^{-1}a$.

Доказательство для пространства H^∞ проще. Тем же способом, что и для A , все сводится к случаю, когда меры μ_n абсолютно непрерывны относительно m_1 (при этом используется теорема о множествах пика для H^∞ , доказанная в (9)). Но в этом случае у последовательности $\{\mu_n\}$ непременно существует $\sigma(M(\mathfrak{M}), C(\mathfrak{M}))$ -предельная точка, имеющая ненулевую сингулярную часть относительно m_1 (поскольку $C(\mathfrak{M}) = L^1(m_1)^*$), и можно применить лемму 4.

Теперь теорему 2 легко вывести из лемм 1 и 5 и того факта, что для каждого банахова пространства X множество $\{\Phi \in X^*: \Phi(x) = \|\Phi\| \text{ для некоторого } x \in X, \|x\|=1\}$ плотно в X^* (см., например, (11)).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
6 V 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Эдвардс, Функциональный анализ, М., 1969. ² A. Grothendieck, Canad. J. Math., v. 5, № 2, 129 (1953). ³ A. Pełczyński, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math., Astron., Phys., v. 10, № 12, 641 (1962). ⁴ К. Говман, Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963. ⁵ H. P. Rosenthal, Acta Math., v. 124, № 3-4, 205 (1970). ⁶ J. Chaumat, Anal. Harmon. Orsay, № 85 (1974). ⁷ M. I. Kadec, A. Pełczyński, Studia Math., v. 21, № 2, 161 (1961-1962). ⁸ В. П. Хавин, Вестн. ЛГУ, № 13, 77 (1973). ⁹ E. Amar, A. Lederer, C. R., v. 272, № 22, A1449 (1971). ¹⁰ J.-P. Katane, Proc. Am. Math. Soc., v. 18, № 5, 827 (1967). ¹¹ R. R. Phelps, Adv. in Math., v. 13, № 1, 1 (1974).