

УДК 517.948:513.8+519.4

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, А. В. СОБОЛЕВ

О КОНУСАХ КОНЕЧНОГО РАНГА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 IX 1975)

Обширную главу функционального анализа составляет теория пространств, полуупорядоченных некоторым конусом K (см., например, ⁽¹⁻³⁾). Эта теория нашла разнообразные приложения в приближенных методах, задачах оптимального управления, анализе работы атомных реакторов, задачах эконометрики и др. (см., например, ⁽⁴⁻⁷⁾). Ее идеи и методы широко применяются при исследовании линейных операторов, обладающих свойством положительности; такие операторы возникают в краевых задачах, при анализе разностных схем, в экономических моделях и пр. Линейные положительные операторы — это операторы, оставляющие инвариантным некоторый конус. Такие операторы в естественных условиях обладают важным свойством: у них есть положительное простое собственное значение, являющееся строгой оценкой сверху радиуса круга, в котором лежит их остальной спектр; указанному ведущему собственному значению соответствует единственная нормированная собственная функция в конусе. Наличие ведущего положительного собственного значения играет в ряде задач определяющую роль. Развиты методы ⁽⁸⁻¹⁰⁾, позволяющие оценивать зазор между ведущим собственным значением и радиусом круга, в котором лежит остальной спектр оператора.

Известны и такие классы линейных операторов, для которых можно установить наличие не одного, а целой группы ведущих собственных значений. Один из них образуют осцилляционные операторы ⁽¹¹⁾, для анализа всех собственных значений которых также применима теория конусов (такой анализ основан на переходе к ассоциированным операторам в соответствующих кососимметрических тензорных произведениях пространств). Второй из таких классов образуют индефинитно положительные операторы в пространствах с индефинитной метрикой (обзор см. в ⁽¹²⁾); их теория привела к существенным обобщениям известной теоремы Л. С. Понтрягина ⁽¹³⁾ об инвариантных подпространствах. Можно указать и другие классы.

Возникает естественная проблема выделения таких специальных множеств T , инвариантность которых для линейного оператора A влечет существование у него группы ведущих собственных значений с заданной суммой кратностей. В качестве первой попытки ее решения был разработан ⁽¹⁴⁾ новый метод получения основных теорем теории осцилляционных матриц; наряду с известными утверждениями удалось получить и новые факты, связанные с оценками зазора между собственными значениями.

В настоящей работе описываются так называемые конусы ранга k , из инвариантности которых для линейного оператора вытекает ряд важных свойств его спектра. Пространства с выделенными конусами ранга k будут важны, как представляется авторам, и в других разделах анализа.

1. Замкнутое множество T в вещественном банаховом пространстве E назовем конусом ранга k (конечного или бесконечного), если из $x \in T$ следует $\alpha x \in T$ при $\alpha \in (-\infty, \infty)$, T содержит полностью хотя бы одно подпространство размерности k и не содержит ни одного подпространства большей размерности. Приведем простые примеры.

а) Если K — конус или замкнутая полугруппа в смысле М. Г. Крейна⁽²⁾, то объединение $-K \cup K$ будет конусом, ранг которого не меньше размерности подпространства $-K \cap K$.

б) Конус ранга k в конечномерном координатном пространстве образуют векторы, имеющие не более $k-1$ перемен знака.

в) Пусть P — ограниченный проектор на подпространство $E_0 \subset E$. Тогда множество $T(\alpha) = \{x: \|Px\| \geq \alpha \|x - Px\|$ при каждом $\alpha > 0$ является конусом ранга $\dim E_0$.

Пусть T — конус ранга k в пространстве E . Элементы $u, v \in T$ назовем сравнимыми, если $tu - v \in T$ и $tv - u \in T$ при всех достаточно больших $|t|$.

Введем уклонение $\theta(u, v)$ между элементами $u, v \in T$, равное $+\infty$ при несравнимых u и v , а при сравнимых u и v определенное формулой

$$\theta(u, v) = \max \{ \theta_+(u, v), \theta_-(u, v) \}, \quad (1)$$

где $\theta_+(u, v) = 1$, если $tu - v \in T$ при всех $t \geq 0$, и в противном случае

$$\theta_+(u, v) = \frac{\inf \{ t: t > 0; su - v \in T \text{ при } s \in (t, \infty) \}}{\sup \{ t: t > 0; su - v \in T \text{ при } s \in [0, t] \}}$$

и, аналогично, $\theta_-(u, v) = 1$, если $tu - v \in T$ при всех $t \leq 0$, и в противном случае

$$\theta_-(u, v) = \frac{\sup \{ t: t < 0; su - v \in T \text{ при } s \in (-\infty, t] \}}{\inf \{ t: t < 0; su - v \in T \text{ при } s \in [t, 0] \}}.$$

Как легко видеть, $\theta(u, v) = \theta(v, u) \geq 1$ и $\theta(\alpha u, v) = \theta(u, v)$ при $\alpha \neq 0$. Линейная оболочка элементов u и v целиком лежит в T в том и только том случае, когда $\theta(u, v) = 1$. Если T — указанный в примере а) конус ранга 1, то функция (1) переходит в обычное уклонение⁽⁸⁻¹⁰⁾ между элементами обычного конуса.

По уклонению (1) между элементами определим уклонение между подпространствами $M, N \subset T$ равенством

$$\theta(M, N) = \sup \{ \theta: \theta = \theta(u, v), u \in M, v \in N \}. \quad (2)$$

Очевидно, $\theta(M, N) = \theta(N, M) \geq 1$. Равенство $\theta(M, N) = 1$ имеет место в том и только том случае, когда линейная оболочка множества $M \cup N$ полностью лежит в T .

2. Линейный оператор A назовем фокусирующим с константой c , если $AT \subset T$ и

$$\theta(Au, Av) \leq c^2 < \infty, \quad u, v \in T. \quad (3)$$

Если A фокусирует в смысле работы⁽¹⁰⁾ относительно конуса K М. Г. Крейна, то он будет фокусировать и в смысле приведенного определения относительно конуса $T = -K \cup K$ ранга 1. Если $T = T(\alpha)$ — конус ранга k из примера в) и если $AT(\alpha) \subset T(\beta)$, где $0 < \alpha < \beta$, то A фокусирует с константой

$$c = (\beta - \alpha)^{-1} (1 + \beta) [(1 + \alpha) \|P\| + \alpha]. \quad (4)$$

Если T — конус ранга k из примера б) и A — вполне положительная матрица⁽¹¹⁾, то оператор A фокусирует с константой $c = k^{-1}$ ⁽¹⁴⁾, где k — постоянная оштукатуривания AT в T .

Теорема 1. Если A фокусирует с константой $c < \infty$, то

$$\ln \theta(Au, Av) \leq \frac{c-1}{c+1} \ln \theta(u, v), \quad u, v \in T. \quad (5)$$

Каждый линейный оператор A преобразует линейное подпространство L в линейное многообразие AL . Положим $A^0 L = \overline{AL}$.

Теорема 2. Пусть оператор A фокусирует с константой $c < \infty$. Тогда для каждой двух подпространств $M, N \subset T$ верно неравенство

$$\varphi(A^0 M, A^0 N) \leq \frac{c-1}{c+1} \varphi(M, N), \quad (6)$$

где $\varphi(M, N) = \ln \theta(M, N)$.

Отметим, что функция $\varphi(M, N)$ в общем случае не является метрикой даже на множестве подпространств фиксированной размерности (в отличие от ситуаций, рассмотренных в (8-10)). Однако, как видно из дальнейшего, это не мешает использованию ее при анализе операторов.

3. Положим $\theta(u, M) = \sup \{ \theta : \theta = \theta(u, v), v \in M \}$. Конус T ранга k назовем нормальным, если найдется такое $m = m(T) > 0$, что

$$\rho(u, D) \leq m \ln \theta(u, M), \quad u \in T, \|u\| = 1, \quad (7)$$

при любом k -мерном подпространстве M , лежащем в T , и $D = \{x: x \in M, \|x\| = 1\}$. Если $T = -K \cup K$, где K — конус М. Г. Крейна, то нормальность T эквивалентна нормальности в смысле М. Г. Крейна конуса K . Все конусы примеров б) и в) нормальны — это вытекает из сравнительно просто доказываемой оценки $\rho(u, D) \leq m[\theta(u, M) - 1]$.

Теорема 3. Пусть T — нормальный конус конечного ранга k . Пусть оператор A фокусирует с константой $c < \infty$, причем AT содержит хотя бы одно k -мерное подпространство и $Ax \neq 0$ при $x \in AT, x \neq 0$. Тогда A имеет в T единственное инвариантное k -мерное подпространство; на этом подпространстве оператор A обратим.

Доказательство теоремы 3 основано на следующем: для существования в полном метрическом пространстве R единственной неподвижной точки у оператора $B: R \rightarrow R$ и для сходимости к ней итераций $M_n = BM_{n-1}$ (при любом $M_0 \in R$) достаточно существования такой полунепрерывной снизу функции $\varphi(M, N) = \varphi(N, M) \geq 0, M, N \in R$, и такой неубывающей положительной функции $\gamma(\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$), $\gamma(+0) = 0$, что из $\varphi(M, N) < \gamma(\varepsilon)$ следует $\rho(M, N) < \varepsilon$ и $\varphi(BM, BN) \leq q\varphi(M, N)$, где $q < 1$.

Если $T = T(\alpha)$ — конус конечного ранга k из примера в), то оператор A удовлетворяет условиям теоремы 3, если $AT(\alpha) \subset T(\beta)$, где $\beta > \alpha$ и $Ax \neq 0$ при $x \in T(\beta), x \neq 0$. Поэтому такие операторы имеют инвариантные k -мерные подпространства (близкое утверждение было получено М. Л. Бродским⁽¹⁵⁾ для случая рефлексивных пространств).

4. Определим функцию $\Phi(u, z)$ ($u, z \in E$), положив $\Phi(u, z) = 0$, если $tz - u \in T$ при всех t (т. е. если линейная оболочка элементов u и z лежит в T); положив $\Phi(u, z) = \beta - \alpha$, где $\beta = \inf \{t: sz - u \in T \text{ при } s \geq t\}$ и $\alpha = \sup \{t: sz - u \in T \text{ при } s \leq t\}$, если α и β конечны; положив, наконец, $\Phi(u, z) = \infty$ в остальных случаях. Очевидно, $\Phi(u + \lambda z, z) = \Phi(u, z)$ и $|\delta| \Phi(\gamma u, \delta z) = |\gamma| \Phi(u, z)$.

Элемент $u \in E$ назовем подчиненным элементу $z \in T$, если $tz - u \in T$ при достаточно больших $|t|$. Если u подчинен z , а линейный оператор A оставляет инвариантным конус T ранга k , то элемент Au подчинен элементу Az и $\Phi(Au, Az) \leq \Phi(u, z)$.

Теорема 4. Если A фокусирует с константой c , а элемент $u \in E$ подчинен элементу $z \in T$, то

$$\Phi(Au, Az) \leq \frac{c-1}{c+1} \Phi(u, z). \quad (8)$$

Пусть $[u]$ — порожденный элементом $u \in E$ класс смежности в факторпространстве E/M по некоторому подпространству M . Положим

$$\Psi([u], z) = \sup \{ \varphi : \varphi = \Phi(v, z), v \in [u] \} \quad \text{при } z \in E$$

и

$$\Psi([u], z) = \sup \{ \varphi: \varphi = \Phi(v, x \cos \eta + y \sin \eta), v \in [u], \\ 0 \leq \eta \leq 2\pi \}, \quad \text{при } z = x + iy,$$

где $x, y \in E$.

В дальнейшем предполагается, что A имеет инвариантное k -мерное подпространство $M \subset T$. Через $\lambda_j, j=1, \dots, r$, обозначаются собственные значения (вещественные и комплексные) сужения оператора A на подпространство M , а через z_j — некоторые собственные векторы, отвечающие соответствующим λ_j .

Теорема 5. Пусть A фокусирует с константой c . Тогда при каждом j справедливы оценки

$$\Psi(A[u], z_j) \leq \frac{c-1}{c+1} |\lambda_j| \Psi([u], z_j), \quad u \in E. \quad (9)$$

5. Пусть T — конус ранга k . Фокусирующий оператор A с инвариантным k -мерным подпространством $M \subset T$ назовем правильно фокусирующим, если $\|z\| \Psi(A[u], z) \leq m \|u\|_{E/M}, u \in E, z \in M$. Из теоремы 5 вытекает

Теорема 6. Пусть конус T конечного ранга k нормален. Пусть A правильно фокусирует с константой c .

Тогда точки λ спектра оператора A , отличные от собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ сужения A на M , лежат в круге

$$|\lambda| \leq \frac{c-1}{c+1} \min\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_r|\}.$$

Теорема 6 охватывает соответствующий результат работы (¹⁰). Рассмотренные выше операторы, связанные с примерами б) и в) конусов ранга k , правильно фокусируют.

Укажем еще, что в условиях теоремы 6 кратность каждого ненулевого собственного значения λ_j сужения A на M совпадает с кратностью λ_j как собственного значения оператора A , рассматриваемого на всем E .

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
27 VIII 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах, Гостехиздат, 1950. ² М. Г. Крейн, М. А. Рутман, УМН, т. 3, № 1, 3 (1948). ³ М. А. Красносельский, Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, 1962. ⁴ Л. Коллатц, Функциональный анализ и вычислительная математика, М., «Мир», 1969. ⁵ В. Г. Болтянский, Математические методы оптимального управления, «Наука», 1969. ⁶ С. Б. Шихов, Вопросы математической теории реакторов, Атомиздат, 1973. ⁷ Х. Нукайдо, Выпуклые структуры и математическая экономика, М., «Мир», 1972. ⁸ A. Ostrowski, Mat. Ann., v. 150, 276 (1963). ⁹ E. Hopf, J. Math. and Mech., v. 12, № 5, 683 (1963). ¹⁰ П. П. Забрёйко, М. А. Красносельский, Ю. В. Покорный, Функциональн. анализ и его прилож., т. 5, № 4, 9 (1971). ¹¹ Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, Осцилляционные матрицы и ядра в малые колебания механических систем, Гостехиздат, 1950. ¹² Т. Я. Азизов, И. С. Похвидов, УМН, т. 26, № 4, 43 (1971). ¹³ Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, сер. матем., № 8, 243 (1944). ¹⁴ А. В. Соболев, Сибирск. матем. журн., т. 16, № 4, 875 (1975). ¹⁵ М. Л. Бродский, УМН, т. 14, № 1, 147 (1959).