

УДК 513.015

МАТЕМАТИКА

А. В. КУЗЬМИНЫХ

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

(Представлено академиком А. Д. Александровым 22 VII 1975)

Обозначим через E^n n -мерное евклидово пространство, а через C^1 — конус $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x_n^2$. В дальнейшем, если $K \subset E^n$ — некоторый конус, то через K_x будем обозначать конус, полученный из K параллельным переносом, переводящим вершину конуса K в точку $X \in E^n$, и будем говорить, что K_x параллелен K . Под преобразованием Лоренца будем понимать любое аффинное преобразование $f: E^n \rightarrow E^n$ ($n \geq 3$) такое, что $f(C^1)$ параллелен C^1 .

Как известно, в работе А. Д. Александрова (1) доказана следующая классическая

Теорема А (1). *Каждое биективное отображение $f: E^n \rightarrow E^n$ ($n \geq 3$) такое, что для каждой точки $X \in E^n$ $f(C_x^1) = C_{f(X)}^1$, является преобразованием Лоренца.*

В результате обсуждения этой теоремы на семинаре А. Д. Александрова по хроногеометрии (Новосибирский университет) А. П. Копыловым была высказана гипотеза, заключающаяся в том, что можно отказаться в условии теоремы от того, чтобы какое бы то ни было требование налагалось на все конусы, параллельно конусу C^1 . Подтверждению этой гипотезы и посвящена настоящая заметка.

Будем называть обобщенным преобразованием Лоренца суперпозицию преобразования Лоренца с некоторым сжатием (растяжением) пространства E^n ($n \geq 3$) к оси Ox_n .

В дальнейшем через P_0 будет обозначаться гиперплоскость $P_0 = \{x_n = 0\}$ в пространстве E^n .

Имеет место

Теорема 1. *Пусть $D_1 \subset E^n$ ($n \geq 3$) — множество, являющееся объединением n прямых, параллельных Ox_n и пересекающих плоскость P_0 в точках общего положения с дополнительным условием, что для некоторых трех из них O_0, O_1, O_2 отношение $O_0O_1 : O_0O_2$ иррационально.*

Тогда биективное отображение $f: E^n \rightarrow E^n$, при котором для каждой точки $X \in D_1$ существует такое сжатие $\lambda_X: E^n \rightarrow E^n$ к прямой, параллельной Ox_n и содержащей точку $f(X)$, что $f(C_x^1) = \lambda_X(C_{f(X)}^1)$, является обобщенным преобразованием Лоренца.

Замечание 1. Таким образом, в условии теоремы 1 не требуется, что для каждой пары точек $X, Y \in D_1$ конус $f(C_x^1)$ параллелен конусу $f(C_y^1)$. Требуется лишь, что $f(C_x^1)$ ($X \in D_1$) — круговой конус, гомеоморфный C^1 , а осью, параллельной Ox_n . (Идея, заключающаяся в том, чтобы не предполагать параллельности конусов $f(C_x)$ и $f(C_y)$, принадлежит А. В. Шайденко.)

Замечание 2. Число прямых во множестве D_1 не может быть уменьшено: для каждых двух прямых l_1 и l_2 из E^3 , параллельных Ox_3 , существует разрывное отображение $\varphi: E^3 \rightarrow E^3$ такое, что для каждой точки $X \in l_1 \cup l_2$ $\varphi(C_x^1) = C_{\varphi(X)}^1$.

Рассмотрим теперь не двойной конус C^1 , а ординарный $C^2 = \{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = x_n^2, x_n \geq 0\}$.

В статье (2) доказывается, в частности, следующая

Теорема А (2). Каждое биективное отображение $f: E^n \rightarrow E^n$ ($n \geq 3$) такое, что для каждой точки $X \in E^n$ $f(C_X^2) = C_{f(X)}^2$, является преобразованием Лоренца.

Эта теорема также допускает обобщение, аналогичное теореме 1. А именно, имеет место

Теорема 2. Существует множество $D_2 \subset E^n$ ($n \geq 3$), являющееся объединением $(9n-7)/2$ (если n нечетно) или $(9n-4)/2$ (если n четно) прямых, параллельных Ox_n , обладающее следующим свойством.

Биективное отображение $f: E^n \rightarrow E^n$, при котором для каждой точки $X \in D_2$ существует такое сжатие $\lambda_X: E^n \rightarrow E^n$ к прямой, параллельной Ox_n и содержащей точку $f(X)$, что $f(C_X^2) = \lambda_X(C_{f(X)}^2)$, является обобщенным преобразованием Лоренца.

Множество D_2 может быть построено следующим образом. Пусть $T_0 \subset P_0$ — множество, состоящее из n точек в общем положении. Обозначим через O_0 некоторую точку из T_0 .

Пусть n нечетно. Представим множество $T_0 \setminus O_0$ в виде объединения $\bigcup_{p \in Q}$ p непересекающихся пар p точек (через Q обозначено множество этих пар).

Пусть n четно. Пусть $O_1 \in T_0 \setminus O_0$ — некоторая точка. Представим $T_0 \setminus \{O_0, O_1\}$ в виде объединения $\bigcup_{p \in Q'}$ p непересекающихся пар p точек (че-

рез Q' обозначено множество этих пар). Пусть $O_2 \in T_0 \setminus \{O_0, O_1\}$. Обозначим через p' пару $\{O_1, O_2\}$. Обозначим через Q множество $Q' \cup p'$.

Для каждой пары $p = \{A, B\} \in Q$ рассмотрим семь точек $G, G_1, G_2, F, F_1, F_2, \mathcal{E}$ из P_0 таких, что четверки точек $\{G, A, B, F\}$, $\{G, G_1, \mathcal{E}, G_2\}$, $\{F, F_1, \mathcal{E}, F_2\}$, $\{O_0, F_2, G_1, A\}$, $\{O_0, G_2, F_1, B\}$ коллинеарны, в каждой такой четверке точки расположены именно в таком порядке и отношения $O_0 F_2 : O_0 G_1, O_0 G_2 : O_0 F_1$ иррациональны.

Обозначим множество $\{O_0, G, G_1, G_2, F, F_1, F_2, \mathcal{E}, A, B\}$ через $M(p)$. При этом, в случае четного n , выбирая для пары p точки $G, G_1, G_2, F, F_1, F_2, \mathcal{E}$, позаботимся о том, чтобы $M(p') \cap M(p_0)$ (где $p_0 \in Q'$ — такая пара, что $p_0 \supset O_2$) состояло из четырех точек.

Обозначим через D_2' множество $\bigcup_{p \in Q} M(p)$. Очевидно, что в случае нечет-

ного n множество D_2' содержит $1 + 9(n-1)/2 = (9n-7)/2$ точек, в случае четного n содержит $1 + 9(n-2)/2 + 6 = (9n-4)/2$ точек. Через D_2 обозначим множество, являющееся объединением прямых, параллельных Ox_n такое, что $D_2 \cap P_0 = D_2'$.

Замечание 3. Результаты теорем 1 и 2 имеют непосредственный физический смысл. Например, теорема 2 означает, что взаимно однозначное преобразование пространства — времени на себя, сохраняющее постоянство скорости света, испускаемого некоторыми шестнадцатью источниками, покоящимися в некоторой инерциальной системе, есть преобразование Лоренца.

Замечание 4. Если рассматривать не поверхностные (как C^1 или C^2), а телесные конусы, то имеет место, например, следующая

Теорема 3. Существует множество $D_0 \subset E^n$ ($n \geq 3$), обладающее следующими свойствами:

1) для каждой пары P_1, P_2 гиперплоскостей, параллельных гиперплоскости P_0 , множество $D_0 \cap \text{con}(P_1 \cup P_2)$ конечно, где $\text{con } H$ — выпуклая оболочка множества $H \subset E^n$.

2) для каждого двойного замкнутого телесного строго выпуклого конуса $K \subset E^n$ каждое биективное отображение $f: E^n \rightarrow E^n$, при котором для каждой точки $X \in D_0$ $f(K_X)$ есть объединение двух замкнутых выпуклых множеств, является аффинным.

З а м е ч а н и е 5. Если зафиксировать двойной замкнутый телесный строго выпуклый конус K^0 (можно взять, в частности, круговой), то множество, аналогичное множеству D_0 , можно сделать еще более редким.

Точнее, пусть последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел такова, что $\lim a_k = \infty$. Существует множество $D_0(K^0) \subset E^n$ ($n \geq 3$), обладающее следующими свойствами:

1) n -е координаты всех точек из $D_0(K^0)$ различны и имеют вид a_k или $-a_k$;

2) биективное отображение $f: E^n \rightarrow E^n$, при котором для каждой точки $X \in D_0(K^0)$ $f(K_X^0)$ есть объединение двух замкнутых выпуклых множеств, аффинно.

В заключение автор выражает благодарность А. Д. Александрову и А. П. Копылову за ряд ценных замечаний.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
28 V 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Д. Александров, УМН, т. 5, 3 (37), 187 (1950). ² А. Д. Александров, В. В. Овчинникова, Вестн. ЛГУ, № 11, 95 (1953).