

УДК 517.948.35

МАТЕМАТИКА

Ф. Г. МАКСУДОВ, С. Г. ВЕЛИЕВ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА НА ВСЕЙ ОСИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 VII 1975)

Возникшая в квантовой механике обратная задача теории рассеяния изучалась во многих математических исследованиях. В терминах необходимых и достаточных условий эта задача (в случае полусоси) для самосопряженной системы Дирака получила решение в работе ⁽¹⁾. Обобщение на случай $2n$ -компонентных векторов получено в работе ⁽²⁾. Затем в работах ^(3, 4) изучалась обратная задача рассеяния для самосопряженной системы Дирака на всей прямой.

В настоящей работе обратная задача теории рассеяния рассматривается для несамосопряженной системы Дирака на всей оси. Аналогичная задача для оператора Штурма — Лиувилля на полусоси решена в ⁽⁵⁾, а на всей оси в ⁽⁶⁾.

Через L будем обозначать оператор, заданный в гильбертовом пространстве $L_2^2(-\infty, \infty)$ дифференциальным выражением

$$ly = By'(x) + mTy(x) + Q(x)y(x), \quad (1)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad m \geq 0.$$

Функции $p(x)$, $q(x)$ предполагаются комплекснозначными, в связи с чем оператор L является, вообще говоря, несамосопряженным. Будем предполагать, что при некотором $\varepsilon > 0$ функции $p(x)$, $q(x)$ удовлетворяют условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} [|p(x)| + |q(x)|] e^{\varepsilon|x|} dx < \infty. \quad (2)$$

Рассмотрим случай $m=0$ (общий случай рассматривается аналогично).

1. Построим оператор преобразования. Через $f_{j+}(x, \lambda)$, $f_{j-}(x, \lambda)$, $j=1, 2$, будем обозначать решения дифференциального уравнения

$$ly = By'(x) + Q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad (3)$$

которые обладают при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ соответственно следующей асимптотикой

$$f_{j+}(x, \lambda) \sim e_j(x, \lambda), \quad f_{j-}(x, \lambda) \sim e_j(x, \lambda), \quad j=1, 2,$$

где

$$e_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\lambda x}, \quad e_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}.$$

Эти решения существуют, единственны, голоморфны по λ в полуплоскости $\text{Im } \lambda > -\varepsilon/2$. Можно показать, что они допускают следующие пред-

ставления с помощью операторов преобразования:

$$f_{j+}(x, \lambda) = e_j(x, \lambda) + \int_x^\infty K_+(x, t) e_j(t, \lambda) dt, \quad (4)$$

$$f_{j-}(x, \lambda) = e_j(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x K_-(x, t) e_j(t, \lambda) dt, \quad j=1, 2;$$

при этом ядра $K_\pm(x, t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\|K_+(x, t)\| \leq C_+ e^{-\varepsilon(x+t)/2} \quad \text{при} \quad t \geq x \geq a, \quad (5)$$

$$\|K_-(x, t)\| \leq C_- e^{\varepsilon(x+t)/2} \quad \text{при} \quad t \leq x \leq a$$

и обладают непрерывными производными, подчиненными аналогичным оценкам. Кроме того, ядра $K_\pm(x, t)$ следующим образом связаны с потенциалом $Q(x)$:

$$Q(x) = BK_+(x, x) - K_+(x, x)B = -(BK_-(x, x) - K_-(x, x)B). \quad (6)$$

Отметим еще, что пары вектор-функций $f_{1+}(x, \lambda)$, $f_{2+}(x, \lambda)$ и $f_{1-}(x, \lambda)$, $f_{2-}(x, \lambda)$ образуют в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < \varepsilon/2$ фундаментальные системы решений, вронскианы которых

$$w_+(\lambda) = -2i, \quad w_-(\lambda) = -2i. \quad (7)$$

2. Обозначим через $w(\lambda)$ и $\tilde{w}(\lambda)$ вронскианы

$$w(\lambda) = [f_{2-}(x, \lambda); f_{1+}(x, \lambda)], \quad \tilde{w}(\lambda) = [f_{1-}(x, \lambda); f_{2+}(x, \lambda)]. \quad (8)$$

Из оценок (5) вытекает, что $w(\lambda)$ и $\tilde{w}(\lambda)$ являются аналитическими функциями соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon/2$ и $\operatorname{Im} \lambda < \varepsilon/2$, а также обладают при $|\lambda| \rightarrow \infty$ асимптотикой

$$w(\lambda) = 1 + O(1/\lambda); \quad (9)$$

$$\tilde{w}(\lambda) = 1 + O(1/\lambda) \quad (10)$$

равномерно в каждой полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > \eta_1$ ($\eta_1 > -\varepsilon/2$) и $\operatorname{Im} \lambda < \eta_2$ ($\eta_2 < \varepsilon/2$) соответственно. Из (9) и (10) и аналитичности функций $w(\lambda)$ и $\tilde{w}(\lambda)$ следует, что они имеют конечное число нулей λ_k , $k=1, \dots, \beta$, и $\tilde{\lambda}_i$, $i=1, \dots, \tilde{\beta}$, соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ и $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$; кратности этих нулей обозначим m_k и $\tilde{m}_i$ соответственно. Будем называть эти нули сингулярными числами оператора L . Положим для определенности, что $\operatorname{Im} \lambda_k > 0$ при $k=1, \dots, \alpha$, $\operatorname{Im} \lambda_k = 0$ при $k=\alpha+1, \dots, \beta$, а также $\operatorname{Im} \tilde{\lambda}_i < 0$ при $i=1, \dots, \tilde{\alpha}$ и $\operatorname{Im} \tilde{\lambda}_i = 0$ при $i=\tilde{\alpha}+1, \dots, \tilde{\beta}$.

Рассмотрим также вронскианы

$$v(\lambda) = [f_{2-}(x, \lambda); f_{2+}(x, \lambda)], \quad \tilde{v}(\lambda) = [f_{1+}(x, \lambda); f_{1-}(x, \lambda)]. \quad (11)$$

В отличие от $w(\lambda)$ и $\tilde{w}(\lambda)$ они заданы только в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < \varepsilon/2$. Используя (4) и (5), легко показать, что в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < \eta < \varepsilon/2$ функции $v(\lambda)$ и $\tilde{v}(\lambda)$ равномерно ограничены. Отметим, что в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < \varepsilon/2$ справедливо равенство

$$w(\lambda) \tilde{w}(\lambda) + v(\lambda) \tilde{v}(\lambda) = 4. \quad (12)$$

Будем называть пару функций $\{s(\lambda); \tilde{s}(\lambda)\}$,

$$s(\lambda) = \frac{v(\lambda)}{w(\lambda)}, \quad \tilde{s}(\lambda) = \frac{\tilde{v}(\lambda)}{\tilde{w}(\lambda)}, \quad (13)$$

функцией рассеяния оператора L .

Скажем, что пара функций $\{s(\lambda); \tilde{s}(\lambda)\}$, определенная в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < \varepsilon_0$, является функцией типа (s) , если $s(\lambda)$ и $\tilde{s}(\lambda)$ мероморфны, не имеют не вещественных полюсов, не обращается в нуль выражение

$1+s(\lambda)\tilde{s}(\lambda)$, а также для каждого $\eta < \varepsilon_0$ в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < \eta$ функции $s(\lambda)$ и $\tilde{s}(\lambda)$ имеют при $|\lambda| \rightarrow \infty$ асимптотику $O(1/\lambda)$.

Очевидно, функция рассеяния $\{s(\lambda); \tilde{s}(\lambda)\}$, определенная формулой (13), является функцией типа (s) в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon/2, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ (здесь ε_1 и ε_2 — соответственно расстояния от оси $\operatorname{Im} \lambda = 0$ до не вещественных нулей вронскианов $w(\lambda)$ и $\tilde{w}(\lambda)$).

Можно показать, что функция $\{s(\lambda); \tilde{s}(\lambda)\}$ типа (s) допускает единственную факторизацию. Эта задача состоит в определении функций $W(\lambda)$, $\tilde{W}(\lambda)$ голоморфных соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon$ и $\operatorname{Im} \lambda < \varepsilon$, имеющих при $|\lambda| \rightarrow \infty$ асимптотику $2i[1+O(1/\lambda)]$ равномерно в каждой полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda \geq \eta_1 > -\varepsilon$ и $\operatorname{Im} \lambda \leq \eta_2 < \varepsilon$ соответственно, удовлетворяющих в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < \varepsilon$ соотношению

$$W(\lambda) \cdot \tilde{W}(\lambda) = 4/[1+s(\lambda)\tilde{s}(\lambda)]$$

и имеющих заданные числа $\rho_1, \dots, \rho_\nu$ и $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_{\tilde{\nu}}$ своими корнями кратности $M_1, \dots, M_\nu$ и $\tilde{M}_1, \dots, \tilde{M}_{\tilde{\nu}}$ соответственно.

3. Так как вронскиан вектор-функций $f_{2-}(x, \lambda_k)$, $f_{1+}(x, \lambda_k)$ равен нулю, то они линейно зависимы. Имеет место более сильное утверждение.

Теорема 1. *Существуют такие цепочки чисел $\{\kappa_0^k, \dots, \kappa_{m_k-1}^k\}$, $\kappa_0^k \neq 0$, для которых справедливы равенства*

$$\frac{1}{j!} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^j f_{2-}(x, \lambda_k) = \sum_{\nu=0}^j \kappa_{j-\nu}^k \frac{1}{\nu!} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^\nu f_{1+}(x, \lambda_k),$$

$$j=0, \dots, m_k-1; \quad k=1, \dots, \alpha.$$

Аналогично, существуют такие цепочки чисел $\{\tilde{\kappa}_0^i, \dots, \tilde{\kappa}_{\tilde{m}_i-1}^i\}$, $\tilde{\kappa}_0^i \neq 0$, для которых справедливы равенства

$$\frac{1}{j!} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^j f_{1-}(x, \tilde{\lambda}_i) = \sum_{\nu=0}^j \tilde{\kappa}_{j-\nu}^i \frac{1}{\nu!} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^\nu f_{2+}(x, \tilde{\lambda}_i),$$

$$j=0, \dots, \tilde{m}_i-1; \quad i=1, \dots, \tilde{\alpha}.$$

Последовательности чисел

$$\{\kappa_0^k, \dots, \kappa_{m_k-1}^k\}, \quad \{\tilde{\kappa}_0^i, \dots, \tilde{\kappa}_{\tilde{m}_i-1}^i\}$$

будем называть нормированной цепочкой, прикрепленной к собственному числу λ_k , $k=1, \dots, \alpha$, и $\tilde{\lambda}_i$, $i=1, \dots, \tilde{\alpha}$, соответственно.

По аналогии с самосопряженным случаем будем называть данными рассеяния оператора L совокупность следующих объектов: функцию рассеяния $\{s(\lambda); \tilde{s}(\lambda)\}$, собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$, $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{\tilde{\alpha}}$ и прикрепленные к ним нормированные цепочки.

4. Ядро $K_+(x, t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$K_+(x, t) + \int_x^\infty K_+(x, u) F_+(u+t) du + F_+(x+t) = 0, \quad -\infty < x \leq t < \infty \quad (14)$$

где

$$F_+(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} f_s(x) & 0 \\ 0 & f_{\tilde{s}}(x) \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\alpha} f_k^+(x) & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^{\tilde{\alpha}} f_k^-(x) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix}^{-1},$$

$$f_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_+ s(\lambda) e^{ix\lambda} d\lambda; \quad f_{\tilde{s}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_+ \tilde{s}(\lambda) e^{-ix\lambda} d\lambda$$

(здесь контуром интегрирования служит любая прямая, лежащая в полосе $0 < \text{Im } \lambda < \varepsilon_0$),

$$f_k^+(x) = i \sum_{v=0}^{m_k-1} \kappa_{m_k-1-v}^k \frac{1}{v!} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^v e^{ix\lambda} \frac{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}{w(\lambda)} \Big|_{\substack{\lambda=\lambda_k \\ \text{Im } \lambda_k > 0}},$$

$$f_k^-(x) = i \sum_{v=0}^{\tilde{m}_k-1} \tilde{\kappa}_{\tilde{m}_k-1-v}^k \frac{1}{v!} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^v e^{-ix\lambda} \frac{(\lambda - \tilde{\lambda}_k)^{\tilde{m}_k}}{\tilde{w}(\lambda)} \Big|_{\substack{\lambda=\tilde{\lambda}_k \\ \text{Im } \tilde{\lambda}_k < 0}}.$$

Уравнение, аналогичное (14), имеет место и для $K_-(x, t)$:

$$K_-(x, t) + \int_{-\infty}^x K_-(x, u) F_-(u+t) du + F_-(x+t) = 0, \quad -\infty < t \leq x < \infty;$$

его ядро $F_-(x)$ строится по $s_1(\lambda) = \tilde{s}(\lambda) \tilde{w}(\lambda) / w(\lambda)$ и $\tilde{s}_1(\lambda) = s(\lambda) w(\lambda) / \tilde{w}(\lambda)$ аналогично $F_+(x)$.

Пара матриц-функций $\{F_+, F_-\}$, построенных по данным рассеяния, обладает (F, ε) -свойством, т. е.:

а) для любого вещественного a существуют такие константы $C_a^\pm$, что $\|F_+(x)\| \leq C_a^+ e^{-\varepsilon x/2}$ при $x > a$, $\|F_-(x)\| \leq C_a^- e^{\varepsilon x/2}$ при $x < a$;

б) из того, что матрица-функция $\varphi_x(t) e^{-\varepsilon t/2}$ ($\psi_x(t) e^{\varepsilon t/2}$) суммируема на полуоси $t > x$ ($t < x$) и удовлетворяет уравнению

$$\varphi_x(t) + \int_x^\infty \varphi_x(u) F_+(u+t) du = 0 \quad \text{при } t > x$$

$$\left(\psi_x(t) + \int_{-\infty}^x \psi_x(u) F_-(u+t) du = 0 \quad \text{при } t < x \right),$$

следует, что $\varphi_x(t) = 0$ при $t > x$ ($\psi_x(t) = 0$ при $t < x$).

5. Теперь можно сформулировать результат по обратной задаче.

Теорема 2. Пусть $\{s(\lambda); \tilde{s}(\lambda)\}$ есть функция типа (s) в некоторой полосе $|\text{Im } \lambda| \leq \varepsilon_0$, числа $\rho_i, \tilde{\rho}_j, i=1, \dots, \gamma; j=1, \dots, \tilde{\gamma}$, и цепочки чисел $\{\kappa_0^i, \dots, \kappa_{M_i-1}^i\}, \{\tilde{\kappa}_0^j, \dots, \tilde{\kappa}_{\tilde{M}_j-1}^j\}$ таковы, что пара матриц-функций $\{F_+, F_-\}$, построенная по этим величинам, обладает (F, ε) -свойством ($\varepsilon \geq 2\varepsilon_0$).

Тогда существует (и притом единственный) потенциал $Q(x)$, удовлетворяющий условию (2), такой, что данные рассеяния оператора L совпадают с заданными величинами. Это означает, что $\{s(\lambda); \tilde{s}(\lambda)\}$ является функцией рассеяния оператора L , числа $\rho_i, \tilde{\rho}_j, i=1, \dots, \gamma; j=1, \dots, \tilde{\gamma}$, — невещественными сингулярными числами кратности $M_i, \tilde{M}_j$, а $\{\kappa_0^i, \dots, \kappa_{M_i-1}^i\}, \{\tilde{\kappa}_0^j, \dots, \tilde{\kappa}_{\tilde{M}_j-1}^j\}$ — нормировочными цепочками, прикрепленными к этим сингулярным числам.

Авторы глубоко благодарны Ф. С. Рофе-Бекетову за внимание к работе, полезные советы и замечания.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
3 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Г. Гасымов, Б. М. Левитан, ДАН, т. 167, № 6 (1966). ² М. Г. Гасымов, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 19 (1968). ³ И. С. Фролов, ДАН, т. 207, № 1 (1972). ⁴ Фам-Лой Ву, Укр. матем. журн., т. 24, № 5 (1972). ⁵ В. Э. Лянце, ДАН, т. 166, № 1 (1966). ⁶ В. А. Блашак, Дифференциальн. уравнения, т. 4, № 8, 10 (1968).