

П. Е. СОБОЛЕВСКИЙ

ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ КОЭРЦИТИВНО ПОЗИТИВНЫХ СУММ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 VI 1975)

В ^(1, 2) дано точное описание областей определения дробных степеней коэрцитивно позитивных сумм коммутирующих позитивных операторов. Здесь эти результаты переносятся на класс некоммутирующих операторов, включающий, например, произвольные эллиптические и параболические операторы с гладкими коэффициентами.

Для операторов с одинаковыми областями определения установлено, в частности, совпадение областей определения их дробных степеней (аналог теоремы Гайнца ⁽³⁾). В приложениях это приводит, например, к точному описанию областей определения дробных степеней эллиптических операторов (теорема Сили ⁽⁴⁾).

1. Суммы позитивных операторов. Оператор A , действующий в банаховом пространстве E , называется позитивным, если он имеет плотную в E область определения $D(A)$ и если существуют такие $\varphi \in (0, \pi)$, что для $\lambda = r \exp(i\varphi)$ с $|\varphi| \in [\varphi, \pi]$ и достаточно большим $r \geq 0$ оператор $\lambda - A$ имеет ограниченный обратный, и $\|(\lambda - A)^{-1}\|_E \leq M(|\lambda| + 1)^{-1}$. Нижняя грань $\varphi(A)$ таких φ называется спектральным углом A . Очевидно, $\varphi[A(k)] = \varphi(A)$ для сдвинутого оператора $A(k) = k + A$, но $\|[\lambda - A(k)]^{-1}\|_E \leq M \cdot (|\lambda| + 1)^{-1}$ уже при всех $r \geq 0$, если $k \geq 0$ достаточно велико.

Изучим позитивность суммы $C = A + B$ позитивных операторов A и B . Если A и B коммутируют, то резольвенту оператора $C(k) = A(k) + B(k)$ естественно определить с помощью формулы Коши — Рисса. В общем случае появляется «довесок», зависящий от коммутанта операторов A и B .

Будем говорить, что A и B — почти коммутирующие позитивные операторы, если выполнены следующие условия. Пусть суженный на $D(B)$ оператор A и суженный на $D(A)$ оператор B позитивны с теми же спектральными углами $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$; здесь $D(B)$ и $D(A)$ — банаховы пространства с нормами $\|B(k)v\|_E$ и $\|A(k)v\|_E$ соответственно. Рассмотрим далее коммутант $\Delta(A, B) = AB - BA$, определенный, естественно, на множестве тех $v \in D(A) \cap D(B)$, которые оператором B переводятся в $D(A)$ и оператором A переводятся в $D(B)$. Пусть справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|\Delta(A, B)v\|_E \leq \\ & \leq M(\|A(k)B(k)v\|_E + \|B(k)A(k)v\|_E)^\gamma (\|A(k)v\|_E + \|B(k)v\|_E)^{1-\gamma} \end{aligned} \quad (1)$$

для $v \in D(\Delta)$ при некотором $0 < \gamma < 1$. Наконец, пусть $D(AB) = D(BA)$. Тогда имеет место

Теорема 1. Пусть A и B — почти коммутирующие операторы, и пусть

$$\varphi(A) + \varphi(B) < \pi.$$

Тогда оператор $C = A + B$ с $D(C) = D(A) \cap D(B)$ допускает замыкание до позитивного оператора $\bar{C}$ и

$$\varphi(\bar{C}) \leq \max[\varphi(A), \varphi(B)].$$

2. Коэрцитивно позитивные суммы операторов. Будем говорить, что операторы A и B образуют коэрцитивную пару, если при достаточно большом $k \geq 0$ и любом $f \in E$ уравнение $A(k)v + B(k)v = f$ имеет единственное решение и справедливо неравенство коэрцитивности

$$\|A(k)v\|_E + \|B(k)v\|_E \leq M\|f\|_E$$

с M , не зависящим от f . Легко видеть, что $C = A + B$ замкнут, если и только если A и B образуют коэрцитивную пару. Поэтому справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, и A и B — коэрцитивная пара операторов.

Тогда оператор C позитивен, и

$$\varphi(C) \leq \max [\varphi(A), \varphi(B)].$$

Будем говорить, что операторы A и B образуют коэрцитивно позитивную пару, если при достаточно большом $k \geq 0$, при всех $\lambda > 0$ и при всех $f \in E$ уравнение $A(k)v + \lambda B(k)v = f$ имеет единственное решение и справедливо неравенство

$$\|A(k)v\|_E + \|\lambda B(k)v\|_E \leq M\|f\|_E$$

с M , не зависящим не только от f , но и от λ . Легко видеть, что асимметрия этого определения только кажущаяся. Оказывается, позитивные операторы можно так сузить, чтобы они образовывали коэрцитивно позитивную пару. Здесь применяется идея, использованная в ⁽⁵⁾ для установления коэрцитивности.

Совокупность тех $v \in E$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{E_{\alpha,p}} = \left\{ \int_0^\infty \|t^\alpha A(k) [t + A(k)]^{-1} v\|_E^p \frac{dt}{t} \right\}^{1/p}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

образует банахово пространство $E_{\alpha,p} = E_{\alpha,p}(E, A)$ (см. ⁽⁶⁻⁸⁾).

Теорема 3. Пусть A и B и их сужения на $D(A)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.

Тогда сужения A и B на $E_{\alpha,p}$ образуют коэрцитивно позитивную пару.

Теорема 4. Пусть A и B удовлетворяют условиям теоремы 3.

Тогда суженный на $E_{\alpha,p}$ оператор $C = A + B$ позитивен, и

$$\varphi(C) \leq \max [\varphi(A), \varphi(B)].$$

3. Дробные степени сумм операторов. Перейдем к основным результатам работы. Если A позитивен, то (см., например, ⁽⁹⁾) при достаточно большом k определены любые степени $A^\alpha(k)$.

Теорема 5. Пусть A и B — коэрцитивно позитивная пара почти коммутирующих позитивных операторов, и $\varphi(A) + \varphi(B) < \pi$.

Тогда при достаточно большом $k \geq 0$ и любых $0 \leq \alpha \leq 1$ имеют место непрерывные вложения

$$D[C^\alpha(k)] \subset D[A^\alpha(k)] \cap D[B^\alpha(k)],$$

т. е. справедливо неравенство коэрцитивности

$$\|A^\alpha(k)v\|_E + \|B^\alpha(k)v\|_E \leq M\|C^\alpha(k)v\|_E, \quad v \in D[C^\alpha(k)] \quad (2)$$

для дробных степеней оператора $C(k) = A(k) + B(k)$.

Теорему 5 дополняет

Т е о р е м а 6 (теорема о «смешанных производных»). В условиях теоремы 5 имеют место непрерывные вложения

$$D(C) = D[C(k)] \subset D[A^\alpha(k)B^{1-\alpha}(k)] \cap D[B^{1-\alpha}(k)A^\alpha(k)],$$

т. е. справедливы неравенства

$$\|A^\alpha(k)B^{1-\alpha}(k)v\|_E + \|B^{1-\alpha}(k)A^\alpha(k)v\|_E \leq M\|C(k)v\|_E, \quad v \in D(C). \quad (3)$$

Из (3), очевидно, вытекают неравенства

$$\|A^\alpha(k)B^{1-\alpha}(k)v\|_E + \|B^{1-\alpha}(k)A^\alpha(k)v\|_E \leq M[\|A(k)v\|_E + \|B(k)v\|_E];$$

их уточняет

Т е о р е м а 7 (теорема о мультипликативных неравенствах). В условиях теоремы 5 справедливы неравенства

$$\|A^\alpha(k)B^{1-\alpha}(k)v\|_E + \|B^{1-\alpha}(k)A^\alpha(k)v\|_E \leq M\|A(k)v\|_E^{\frac{1}{2}}\|B(k)v\|_E^{\frac{1}{2}}, \\ v \in D(A) \cap D(B).$$

Перейдем теперь к описанию условий справедливости тождеств

$$D[C^\alpha(k)] = D[A^\alpha(k)] \cap D[B^\alpha(k)], \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (4)$$

Это означает, что имеет место неравенство (2) и обратное ему неравенство

$$\|C^\alpha(k)v\|_E \leq M[\|A^\alpha(k)v\|_E + \|B^\alpha(k)v\|_E], \quad v \in D[A^\alpha(k)] \cap D[B^\alpha(k)]. \quad (5)$$

Заметим, что (5) лишь при $\alpha=1$ вытекает из неравенства треугольника.

Пусть для любых $v \in D(\Delta)$ и $w \in C^*$ справедливо неравенство

$$|(\Delta[A, B]v, w)| \leq M\|Cv\|_E \cdot \|C^*w\|_{E^*} \|w\|_{E^*}^{\frac{1}{2}}; \quad (6)$$

здесь E^* — сопряженное E пространство, C^* — сопряженный C оператор и (φ, ψ) — значение функционала $\psi \in E^*$ на элементе $\varphi \in E$.

Т е о р е м а 8. Пусть выполнены условия теоремы 5 и условие (6).

Тогда справедливо тождество (4).

Наконец, приведем аналог теоремы Гайнца.

Т е о р е м а 9. Пусть выполнены условия теоремы 5, и $D(A) \subset D(B)$.

Тогда $D[A^\alpha(k)] \subset D[B^\alpha(k)]$ при любых $0 \leq \alpha \leq 1$.

4. Дробные степени дифференциальных операторов. Пусть A и B — эллиптические операторы порядка $2r$ с гладкими ограниченными коэффициентами во всем пространстве R^n , рассматриваемые как операторы в $E = L_p(R^n)$, $1 < p < +\infty$ с $D(A) = D(B) = W_p^{2r}(R^n)$. Из (10), например, следует, что все условия теоремы 4 выполнены, причем $\varphi(A) = \varphi(B) = 0$ и $\gamma = 2r - 1/2r$. Если A — простейший эллиптический оператор с постоянными коэффициентами, то нетрудно подсчитать (см., например, (11)), что $D[A^\alpha(k)] = W_p^{2r\alpha}(R^n)$. В силу теоремы 9 это же верно и для произвольного A . Ранее такой факт другим методом был установлен Сили.

Пусть теперь $\mathcal{L} = d/dt + A$ — параболический оператор с эллиптическим оператором A , коэффициенты которого гладко зависят не только от $x \in R^n$, но и от $t \in [0, 1]$. Будем рассматривать операторы A и $B = d/dt$ в $E = L_p(R^n, [0, 1])$, $1 < p < +\infty$ с $D(A) = W_p^{2r,0}(R^n \times [0, 1])$ и $D(B) = \dot{W}_p^{0,1}(R^n \times [0, 1])$.

Операторы A и B позитивны, $\varphi(A)=0$, $\varphi(B)=\pi/2$, и выполнено (1) и (6) с $\gamma=2r-1/2r$. Наконец, (см., например, ⁽¹²⁾), операторы A и B образуют коэрцитивно позитивную пару. Поэтому справедливы тождества

$$D(\mathcal{L}^\alpha) = \overset{\circ}{W}_p^{2r\alpha, \alpha}(R^n \times [0, 1]), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
4 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. Е. Соболевский, Тр. матем. ф-та Воронежск. гос. унив., в. 3 (1972). ² П. Е. Соболевский, Тр. II Всесоюзн. симп. по теоремам вложения и их приложениям. Алма-Ата, 1973. ³ E. Heinz, Math. Ann., v. 123 (1951). ⁴ R. Seeley, Actes Congrès intern. Math., v. 2, 1971 (1970). ⁵ P. Grisvard, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa v. 2, 1969, p. 311. ⁶ П. Е. Соболевский, УМН, т. 19, в. 6 (120) (1964). ⁷ P. L. Butzer, H. Berens, Semi-Groups of Operators and Approximation, Grundlehren math. Wiss., B. 145, 1967. ⁸ H. Komatsu, Pacific J. Math., v. 21 (1967). ⁹ М. А. Красносельский и др., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., «Наука», 1966. ¹⁰ М. З. Соломяк, ДАН, т. 127, № 1 (1959). ¹¹ С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», М., 1969. ¹² В. А. Солонников, Матер. к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными, Новосибирск, 1963.