

В. В. ВЕЛИЧЕНКО

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ МНОГОЛИСТНЫХ ПОЛЕЙ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 9 VI 1975)

1°. Методом изучения многолистных полей экстремалей показывается, что экстремали принципа максимума Л. С. Понтрягина (1), не удовлетворяющие достаточным условиям оптимальности (2, 3), являются оптимальными для суженного класса траекторий. В классическом вариационном исчислении получены свойства абсолютной минимальности экстремали с фокусами Якоби и огибающей семейства экстремалей.

2°. Формулировка задачи. Задачу сформулируем, как в (3). Требуется выбрать управление $u(t)$ для n -мерной системы

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (1)$$

минимизирующее функционал

$$I = \Phi[x(T), T]. \quad (2)$$

Левый конец $\{x^0, T^0\}$ траектории $x(t)$ системы (1) фиксирован, правый конец $\{x(T), T\}$ должен принадлежать терминальному многообразию M , определяемому условиями

$$M_j(x, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \leq n. \quad (3)$$

Функции f , Φ и M_j удовлетворяют условиям непрерывности и дифференцируемости (3), допустимые управления $u(t)$ считаем кусочно-непрерывными со значениями в фиксированной области U .

3°. Многолистные поля экстремалей. Мы будем изучать случай, когда решение задачи оптимизации, даваемое необходимыми условиями принципа максимума, в рассматриваемой области $A \subset X \times t$ не единственно. Пусть можно выделить семейство экстремалей $\tilde{X}$, куски которых $\tilde{x}^{A_i}$ однократно покрывают области $A_i \subset A$, $i = 1, 2, \dots$. Область A_i назовем листом. Будем говорить, что листы A_k и A_l сшиты, если они имеют общую часть (границу) C_{kl} , все $\tilde{x}^{A_k}$ оканчиваются на C_{kl} , все $\tilde{x}^{A_l}$ начинаются на C_{kl} , и имеющие общую точку $\tilde{x}^{A_k}$ и $\tilde{x}^{A_l}$ являются частями одной и той же экстремали $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Множество попарно сшитых между собой листов, содержащее конечные точки всех рассматриваемых экстремалей семейства $\tilde{X}$, назовем многолистным полем экстремалей. Здесь мы будем рассматривать случай, когда число листов конечно.

Пусть $\tilde{x}'(t)$, $\tilde{x}''(t)$ — удовлетворяющие необходимым условиям принципа максимума (1, 3) экстремали задачи (1) — (3), начинающиеся в точках $\{\xi', \tau'\}$, $\{\xi'', \tau''\}$, и $\tilde{u}'(t)$, $\tilde{u}''(t)$ и $\tilde{T}'$, $\tilde{T}''$ — соответствующие им управления и конечные моменты времени. Скажем, что семейство $\tilde{X}$ образует многолистное поле экстремалей, L — непрерывное для листа A_i , если существуют такие константы ν и μ , что для всех внутренних точек $\{\xi', \tau'\}$, $\{\xi'', \tau''\} \in A_i$ таких, что $|\{\xi', \tau'\} - \{\xi'', \tau''\}| \leq \varepsilon$, выполнены условия

$$\min_{\substack{\{\tilde{T}', \tilde{T}''\} \\ \max_{\{\tau', \tau''\}}} |\tilde{u}'(t) - \tilde{u}''(t)| dt \leq \nu \varepsilon, \quad |\tilde{T}' - \tilde{T}''| \leq \mu \varepsilon. \quad (4)$$

Если условия (4) нарушаются на кусочно-гладких множествах (2) $B_i \subset A_i$ размерности, меньшей $n+1$, поле экстремалей назовем кусочно L -непрерывным для листа A_i . Многолистное поле экстремалей назовем кусоч-

по L -непрерывным, если оно кусочно L -непрерывно для каждого листа и границы S_i между листами являются кусочно-гладкими множествами размерности меньшей $n+1$.

4°. Достаточные условия оптимальности. Поскольку через точку $\{x, t\} \in A$ может проходить не единственная экстремаль, мы будем каждый раз относить ее к тому листу, который содержит начинающуюся в этой точке интересующую нас экстремаль. Функцию $\tilde{V}_i(x, t)$, значение которой в точке $\{x, t\}$ есть значение функционала (2) для экстремали $\tilde{x} \in \tilde{X}$ с началом в $\{x, t\} \in A_i$, назовем опорной функцией для листа A_i .

Теорема 1. Пусть многолистное поле экстремалей кусочно L -непрерывно и функции $\tilde{V}_i(x, t)$ непрерывны в своих листах A_i . Тогда каждая экстремаль $\tilde{x} \in \tilde{X}$ доставляет для любой своей точки в качестве фиксированных начальных данных на левом конце абсолютный минимум функционалу (2) среди траекторий системы (1), проходящих по любой последовательности из конечного числа сшитых между собой листов A_i .

Доказательство основано на вычислении приращения функционала с помощью опорных функций (3), построенных для отдельных листов.

5°. О сопряженных фокусах Якоби. В простейшей задаче вариационного исчисления, состоящей в минимизации функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(x, \dot{x}, t) dt, \quad x \in E_1, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad (5)$$

поле образуется однопараметрическим семейством экстремалей

$$x = \tilde{x}(t, \alpha), \quad (6)$$

однократно покрывающим некоторую область A и содержащим исследуемую экстремаль при $\alpha = 0$, и функцией наклона (4)

$$\dot{\tilde{x}}(x, t) = \tilde{x}_t[t, \alpha(x, t)].$$

Обычно предполагается (или выводится из свойств функции f), что функции $\tilde{x}(t, \alpha)$ (следовательно, $\alpha(x, t)$) и $\dot{\tilde{x}}(x, t)$ непрерывны по своим аргументам вместе с частными производными до второго порядка (4, 5). Если в задаче (5) перейти к форме записи (1)–(3) (3), то уже существование равномерно ограниченных частных производных первого порядка у функций $\tilde{x}(t, \alpha)$ и $\alpha(x, t)$ обеспечивает выполнение условий L -непрерывности (4) и позволяет, следовательно, сформулировать аналог теоремы 1 в вариационном исчислении. Здесь мы ограничимся одним частным случаем этой теоремы, позволяющим рассматривать поля экстремалей без требования однократного покрытия.

Условия однократного покрытия области семейством экстремалей (6) нарушаются в точках огибающей этого семейства, определяемых условием $\tilde{x}_\alpha(t, \alpha) = 0$. Для центрального семейства экстремалей точки огибающей являются сопряженными (фокусами Якоби) с центром.

Известные результаты К. Якоби (6) и К. Вейерштрасса (7) состоят в том, что, во-первых, экстремаль не может доставлять исследуемому функционалу минимума, если она содержит точку, сопряженную начальной, и, во-вторых, экстремаль доставляет функционалу абсолютный минимум, если она включена в рассматриваемой области в поле экстремалей (при этом в случае центрального поля условие однократного покрытия исключает существование фокусов Якоби на экстремальных) и функция Вейерштрасса $E(x, \tilde{x}, \dot{x}, t)$ при любых $\dot{x}$ в этой области не отрицательна (4, 5). Теорема 2, определяющая свойства экстремали, содержащей фокусы Якоби и включенной в поле экстремалей, построенное без условия однократного покрытия, в определенной степени дополняет указанные результаты.

Теорема 2. Пусть экстремаль задачи (5) включена в семейство экстремалей (6) с кусочно-гладкой огибающей, для которого в некоторой области A функции $\tilde{x}(t, \alpha)$ и $\alpha(x, t)$ имеют для соответствующих значений x

и $\{x, t\} \in A$ равномерно ограниченные частные производные первого порядка по своим аргументам, и функция Вейерштрасса $E[x, \tilde{x}(x, t), \dot{x}, t]$ в A при любых $\dot{x}$ не отрицательна. Тогда, если экстремаль имеет общую точку с огибающей, она доставляет в A абсолютный минимум функционалу в задаче (5) среди кривых, имеющих общие точки с огибающей.

Доказательство проводится путем расслоения области A на два чиста, однократно покрытых экстремалью и шпигуемых по огибающей.

Случай, когда семейство (6) имеет несколько огибающих, рассматривается аналогично и сводится к изучению многолистного поля.

Если поле экстремалей в теореме 2 центральное, она даст достаточные условия минимума для экстремали, содержащей фокусы Якоби. В применении к изучавшемуся К. Якоби ⁽⁶⁾ принципу наименьшего действия Мопертюи — Эйлера — Лагранжа ^(8, 9) ее утверждение может быть интерпретировано следующим образом. При выполнении условий, определяющих многолистное поле экстремалей, существует многозначное отображение покрытой многолистным полем области A в такую область A^* , в которой образы экстремалей непрерывны и однократно покрывают A^* . Тогда теорема 2 утверждает, что прямой путь всегда (и при отсутствии, и при наличии на нем фокусов Якоби) доставляет действию по Мопертюи наименьшее значение среди путей, образы которых непрерывны в A^* . Образно говоря, если реальные движения в координатном пространстве образуют складки, принцип наименьшего действия в рассматриваемой задаче справедлив не только «в малом», для каждой отдельной складки, но и «в целом», если складки распрямить.

Сказанное выше справедливо также и для многолистных полей, образованных прямыми путями принципа Гамильтона.

6°. Об одном свойстве огибающей семейства экстремалей. Рассмотрим центральное семейство экстремалей (6). Известно, что в регулярном случае, когда для каждой экстремали $f_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$, огибающая семейства не является экстремалью и не может, следовательно, доставлять минимум функционалу (5) в задаче с закрепленными точками, выбранными на этой огибающей ^(4, 5). Однако можно показать, что огибающая удовлетворяет следующему свойству субоптимальности (в случае $f_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$ экстремали семейства лежат по одну сторону от огибающей) *.

Теорема 3. Огибающая центрального семейства экстремалей, удовлетворяющих условиям теоремы 2, доставляет в A абсолютный минимум функционалу (5) в классе кривых, расположенных со стороны огибающей, заполненной экстремалью.

Доказательство. Пусть на рис. 1 γ^1, γ^2 — экстремали, 1—5 — номера точек, D — огибающая, B — произвольная допустимая кривая с концами в точках 2 и 4. Пусть $I(\alpha_{ij})$ — значение интеграла (5) для кривой α с концами в точках i и j . По теореме 2 имеем

$$I(\gamma_{15}^1) = I(\gamma_{14}^1) + I(\gamma_{45}^1) \leq I(\gamma_{12}^2) + I(B_{24}) + I(\gamma_{45}^1). \quad (7)$$

С другой стороны, по теореме об огибающей ^(4, 5)

$$I(\gamma_{14}^1) = I(\gamma_{12}^2) + I(D_{24}). \quad (8)$$

Из (7) и (8) получаем требуемый результат $I(D_{24}) \leq I(B_{24})$.

7°. Пример. В задаче о плоском движении материальной точки в однородном поле силы тяжести из точки 1 $\{0, 0\}$ в точку 3 $\{x_3, y_3\}$ прин-

* Свойство локальной односторонней минимальности огибающей установил Н. Е. Жуковский ⁽¹²⁾.

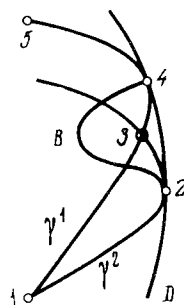


Рис. 1

цип Мопертюи – Эйлера приводит к минимизации интеграла ⁽¹⁰⁾

$$I = \int_{\{0,0\}}^{\{x_h, y_h\}} \sqrt{y+h} \sqrt{1+y'^2} dx. \quad (9)$$

Центральное семейство экстремалей для этой задачи определяется уравнением

$$y = (1 + \alpha^2) x^2 (4h)^{-1} + \alpha x \quad (10)$$

и имеет огибающую ⁽¹¹⁾

$$y = x^2 (4h)^{-1} - h. \quad (11)$$

Здесь область A есть часть плоскости под параболой (11) и может быть разбита на равные ей области A_1 и A_2 . A_1 однократно покрыта кусками

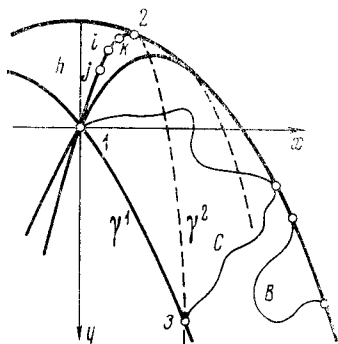


Рис. 2

экстремалией (10) с началом в точке I и концами в точках их касания с параболой (11), являющихся фокусами Якоби (сплошные линии на рис. 2). A_2 однократно покрыта их продолжениями (пунктирные линии). Таким образом, A_1 и A_2 представляют собой листы, сшитые по огибающей (11).

а) В силу теоремы Вейерштрасса (^{7, 4, 5, 11}) экстремаль γ_{13}^1 доставляет в A функционалу (9) абсолютный минимум.

б) В силу теоремы 2 экстремаль γ_{13}^* представляет в A функционалу (9) абсолютный минимум среди кривых вида C , имеющих с огибающей (11) по крайней мере одну общую точку*.

в) В силу теоремы 3 огибающая (11) между любыми своими точками доставляет в A функционалу (9) абсолютный минимум среди кривых вида B с концами в этих точках.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Поступило
15 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. С. Поитрагин, В. Г. Болтянский и др., Математическая теория оптимальных процессов, М., 1961. ² В. Г. Болтянский, Математические методы оптимального управления, М., 1966. ³ В. В. Величенко, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., т. 14, № 1 (1974). ⁴ Г. А. Байес, Лекции по вариационному исчислению, М., 1950. ⁵ М. Лаврентьев, Л. Люстерник, Основы вариационного исчисления, т. 1, ч. II, М.—Л., 1935. ⁶ К. Якоби, Лекции по динамике, М.—Л., 1936. ⁷ К. Weierstrass, Werke, VII, Leipzig, 1927. ⁸ П. Монперть, Л. Эйлер, Ж. Лагранж, В сб.: Вариационные принципы механики, М., 1959. ⁹ Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, М., 1960. ¹⁰ Л. Эйлер, Об определении движения брошенных тел в несопротивляющейся среде методом максимумов и минимумов, В сб.: Вариационные принципы механики, М., 1959. ¹¹ Н. М. Гюнтер, Курс вариационного исчисления, М.—Л., 1941. ¹² Н. Е. Жуковский, Полное собр. соч., т. 9. М.—Л., 1937, стр. 2—37.

* Утверждения а) и б), очевидно, совпадают, если точка 3 совпадает с точкой 2 касания экстремали γ^2 с огибающей, и сводятся к утверждению абсолютной минимальности γ_{12}^2 . Интересно сравнить этот результат с теоремой Дарбу⁽⁸⁾, по которой на экстремали γ^2 существует такая предшествующая точке 2 точка i , что всякая экстремаль γ_{ij}^2 , где точка j предшествует либо совпадает с точкой i , доставляет функционалу абсолютный минимум, а экстремаль γ_{ik}^2 , где точка k следует за точкой i и предшествует, либо совпадает с точкой 2, доставляет ему только относительный минимум, и не доставляет абсолютного. Из приведенного результата следует, что кривая, доставляющая по теореме Дарбу функционалу меньшее значение, чем экстремаль γ_{ik}^2 , должна лежать частично вне области A , покрытой полем экстремалей в ограниченной огибающей.