

УДК 533.70

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. В. БОБЫЛЕВ

МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ МАКСВЕЛЛОВСКИХ МОЛЕКУЛ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 14 VIII 1975)

1. Уравнение Больцмана для максвелловских молекул (потенциал взаимодействия $U(r) = \alpha/r^4$) можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = I[f, f] = \int d\mathbf{w} d\mathbf{n} g\left(\frac{\mathbf{un}}{u}\right) [f(\mathbf{v}')f(\mathbf{w}') - f(\mathbf{v})f(\mathbf{w})], \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$, $g(\cos \theta)$ — произведение дифференциального сечения рассеяния на модуль относительной скорости, $\mathbf{n}$ — единичный вектор направления относительной скорости частиц после столкновения, $d\mathbf{n} = \sin \theta d\theta d\varphi$. Скорости $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{w}'$ частиц после столкновения имеют вид

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{w}}{2} + \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{w}|}{2} \mathbf{n}, \quad \mathbf{w}' = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{w}}{2} - \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{w}|}{2} \mathbf{n}.$$

Покажем, что применение к уравнению Больцмана (1) преобразования Фурье по скорости приводит к существенному упрощению нелинейного столкновительного члена. Полагая

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{v} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (2)$$

умножим уравнение (1) на $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{v})$ и проинтегрируем по скоростям. В результате получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{k} \partial \mathbf{x}} = S[\varphi, \varphi] = \int d\mathbf{v} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}} I[f, f]. \quad (3)$$

Интеграл в правой части уравнения (3) можно записать в виде

$$S[\varphi, \varphi] = \int d\mathbf{v} d\mathbf{w} f(\mathbf{v})f(\mathbf{w}) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{v}+\mathbf{w})/2} F(\mathbf{u}, \mathbf{k}),$$

где

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{k}) = \int d\mathbf{n} g\left(\frac{\mathbf{un}}{u}\right) [e^{-i\mathbf{k} \mathbf{un}/2} - e^{-i\mathbf{k} \mathbf{u}/2}]. \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что $F(\mathbf{u}, \mathbf{k}) = F(\mathbf{k}, \mathbf{u})$. Поэтому

$$S[\varphi, \varphi] = \int d\mathbf{n} d\mathbf{w} f(\mathbf{v})f(\mathbf{w}) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{v}+\mathbf{w})/2} \int d\mathbf{n} g\left(\frac{\mathbf{kn}}{k}\right) [e^{-i\mathbf{u} \mathbf{kn}/2} - e^{-i\mathbf{u} \mathbf{k}/2}]$$

Меняя здесь порядок интегрирования и используя обозначение (2), получим окончательный вид интегрального оператора в уравнении (3)

$$S[\varphi, \varphi] = \int d\mathbf{n} g\left(\frac{\mathbf{kn}}{k}\right) \left[\varphi\left(\frac{\mathbf{k}+\mathbf{kn}}{2}\right) \varphi\left(\frac{\mathbf{k}-\mathbf{kn}}{2}\right) - \varphi(\mathbf{k})\varphi(0) \right]. \quad (5)$$

Этот интеграл является двукратным (по поверхности единичной сферы), в то время как исходный интеграл столкновений Больцмана является пятикратным. Относительная простота оператора (5) дает возможность получить новую информацию о свойствах уравнения Больцмана.

2. Рассмотрим пространственно-однородное уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int d\mathbf{w} d\mathbf{n} g\left(\frac{\mathbf{un}}{u}\right) [f(\mathbf{v}')f(\mathbf{w}') - f(\mathbf{v})f(\mathbf{w})]. \quad (6)$$

Сформулируем два свойства этого уравнения:

(А) Уравнение (6) инвариантно относительно однопараметрической полугруппы преобразований

$$\hat{T}_0 f = f, \quad \hat{T}_s f = \frac{1}{(\pi s)^{3/2}} \int d\mathbf{w} f(\mathbf{w}, t) \exp\left[-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2}{s}\right] \quad (7)$$

функции распределения $f(\mathbf{v}, t)$.

(Б) Пусть функция распределения $f(\mathbf{v}, t)$ удовлетворяет уравнению (6); тогда при любом фиксированном значении параметра $0 < s < \infty$ функционал

$$H_s[f] = \int d\mathbf{v} F_s(\mathbf{v}, t) \ln F_s(\mathbf{v}, t), \quad (8)$$

где

$$F_s(\mathbf{v}, t) = \frac{1}{(\pi s)^{3/2}} \int d\mathbf{w} f(\mathbf{w}, t) \exp\left[-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{w})^2}{s}\right] \quad (9)$$

монотонно не возрастает с ростом t .

Свойства (А) следует из очевидного равенства для оператора (5)

$$S[\varphi(\mathbf{k})e^{-1/4sh^2}, \varphi(\mathbf{k})e^{-1/4sh^2}] = e^{-1/4sh^2} S[\varphi, \varphi], \quad 0 \leq s < \infty,$$

и теоремы о свертке для преобразования Фурье.

Свойство (Б) является обобщением H -теоремы Больцмана. Для его доказательства достаточно заметить, что согласно свойству (А) при любом фиксированном $0 < s < \infty$ функция $F_s(\mathbf{v}, t)$ (9) является решением уравнения (1), и, следовательно (H-теорема Больцмана), функционал (8) не может возрастать с ростом t .

3. Считая отклонения от равновесия малыми, положим

$$f(\mathbf{v}) = f_0(\mathbf{v}) [1 + \Phi(\mathbf{v})], \quad f_0(\mathbf{v}) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right) \quad (10)$$

и, пренебрегая в интеграле столкновений $I[f, f]$ квадратичными по $\Phi(\mathbf{v})$ слагаемыми, рассмотрим задачу на собственные значения для линеаризованного оператора столкновений

$$\lambda \Phi(\mathbf{v}) = \hat{L}[\Phi] = \int d\mathbf{w} d\mathbf{n} g\left(\frac{\mathbf{un}}{u}\right) f_0(\mathbf{w}) [\Phi(\mathbf{v}') + \Phi(\mathbf{w}') - \Phi(\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{w})]. \quad (11)$$

Обычно требуют ограниченности интеграла

$$\|\Phi\|^2 = \int d\mathbf{v} f_0(\mathbf{v}) \Phi^2(\mathbf{v}), \quad (12)$$

что позволяет применять теорию самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве H с нормой (12). Собственные функции оператора $\hat{L}$, принадлежащие пространству H , и соответствующие собственные значения известны (4). Однако, как отмечалось в литературе (4), интеграл (12) не имеет физического смысла и поэтому, вообще говоря, нет оснований ограничиваться рассмотрением функций из пространства H . Действительно, для существования интеграла (12) необходимо, чтобы функция распределения $f(\mathbf{v})$ (ср. (10)) убывала при $v \rightarrow \infty$ быстрее, чем $\exp(-mv^2/4T)$. Такое ограничение является слишком сильным, так как никакие физические соображения не запрещают рассматривать функции распределения даже со степенным убыванием при $v \rightarrow \infty$.

Рассмотрим задачу на собственные значения (11) при минимальных ограничениях на функцию $\Phi(\mathbf{v})$. Потребуем существования интегралов

$$I_0 = \int d\mathbf{v} f_0(\mathbf{v}) |\Phi(\mathbf{v})|, \quad I_2 = \int d\mathbf{v} f_0(\mathbf{v}) |\Phi(\mathbf{v})| v^2 \quad (13)$$

т. е. ограниченности гидродинамических моментов функции распределения $f(\mathbf{v})$. Положим

$$h(\mathbf{k}) = \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \int d\mathbf{v} \Phi(\mathbf{v}) \exp \left[-\frac{m}{2T} \left(\mathbf{v} + i\mathbf{k} \frac{T}{m} \right)^2 \right] \quad (14)$$

и, применяя это преобразование к уравнению (11), получим

$$\lambda h(\mathbf{k}) = \hat{R}[h] = n_0 \int d\mathbf{n} g\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{n}}{k}\right) \left[h\left(\frac{\mathbf{k}+\mathbf{k}\mathbf{n}}{2}\right) + h\left(\frac{\mathbf{k}-\mathbf{k}\mathbf{n}}{2}\right) - h(\mathbf{k}) - h(0) \right].$$

Оператор $\hat{R}$ является линеаризованным оператором столкновений в Фурье-представлении (ср. (5)). Этот оператор инвариантен относительно полной ортогональной группы, включающей вращения и инверсию, и группы изотропных растяжений (сжатий) трехмерного пространства; его собственные функции имеют вид

$$h_{lm}(\mathbf{k}; r) = k^r Y_{lm}(\mathbf{k}/k), \quad (15)$$

где $Y_{lm}(\mathbf{n})$ — сферическая функция, а r — некоторый, вообще говоря, комплексный параметр ($\text{Re } r \geq 0$); соответствующие собственные значения равны ($l=0, 1, \dots$)

$$\lambda_l(r) = 2\pi n_0 \int_0^\pi d\theta \sin \theta g(\cos \theta) \left[\cos^r \frac{\theta}{2} P_l\left(\cos \frac{\theta}{2}\right) + \sin^r \frac{\theta}{2} P_l\left(\sin \frac{\theta}{2}\right) - (1 + \delta_{l0} \delta_{r0}) \right], \quad (16)$$

где $P_l(x)$ — полином Лежандра. Подставляя (15) в левую часть равенства (14) и используя формулу обращения преобразования Фурье, найдем собственные функции оператора $\hat{L}$ (11):

$$\Phi_{lm}(\mathbf{v}; r) = \left(\frac{mv^2}{2T} \right)^{l/2} {}_1F_1\left(\frac{l-r}{2}; l + \frac{3}{2}; \frac{mv^2}{2T}\right) Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{v}}{v}\right),$$

где ${}_1F_1(\alpha; \gamma; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

При $v \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула ($r-l \neq 0, 2, 4, \dots$)

$$\Phi_{lm}(\mathbf{v}; r) \sim \frac{\Gamma(l+3/2)}{\Gamma\left(\frac{l-r}{2}\right)} \exp\left(\frac{mv^2}{2T}\right) \left(\frac{mv^2}{2T}\right)^{-(r+3)/2} Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{v}}{v}\right).$$

Поэтому интегралы (13) существуют, если только $\text{Re } r > 2$.

При $r = l + 2n$, $n, l = 0, 1, \dots$, вырожденная гипергеометрическая функция сводится к полиному Лагерра

$$\Phi_{lm}(\mathbf{v}; 2n+l) = \frac{n! \Gamma(l+3/2)}{\Gamma(n+l+3/2)} \left(\frac{mv^2}{2T}\right)^{l/2} \mathcal{L}_n^{l+1/2}\left(\frac{mv^2}{2T}\right) Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{v}}{v}\right).$$

В этом случае существует интеграл (12), и соответствующие собственные значения $\lambda_{nl} = \lambda_l(2n+l)$, $n, l = 0, 1, \dots$, (16) образуют дискретный спектр оператора $\hat{L}$ в гильбертовом пространстве H . В общем случае уравнение (11) имеет нетривиальное решение (вообще говоря, не единственное), удовлетворяющее условию ограниченности интегралов (13), если число λ принадлежит области значений хотя бы одной из комплекснозначных функций $\lambda_l(r)$, $l = 0, 1, \dots$, (16) при $\text{Re } r > 2$. Действительным значениям

параметра r отвечают действительные значения λ и действительные собственные функции. Все собственные значения лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, причем $\lambda = 0$ не является изолированной точкой спектра, так как $\lambda_0(2) = 0$, а $\lambda_0(r)$ — непрерывная функция. Следовательно, в классе начальных условий для уравнения Больцмана со степенным убыванием при $v \rightarrow \infty$ скорость асимптотической релаксации (связанная со спектром оператора $\hat{L}$ (11)) зависит от показателя степени n , вообще говоря, не имеет нижней границы. Полные доказательства приведены в (2).

Автор благодарен М. В. Масленникову и В. А. Чуянову за постоянное внимание к работе и М. Н. Когану за обсуждение результатов.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
30 VII 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Д. Уленбек, Д. Форд, Лекции по статистической механике, М., «Мир», 1965.
- ² А. В. Бобылев, Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, № 51, 1975.