

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

Ю. П. БОГЛАЕВ, А. В. ЖДАНОВ

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРАМИ ТИПА КОШИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 1 VIII 1975)

В настоящей заметке рассматривается новый класс сингулярно возмущенных задач. Начиная с работы ⁽¹⁾, исследования, связанные с сингулярными возмущениями, имеют дело, как правило, с возмущающими дифференциальными операторами ⁽²⁾. Для выяснения общих закономерностей в сингулярно возмущенных задачах имеет смысл изучать и другие возмущающие операторы. Имеется небольшой список сингулярно возмущающих операторов, отличных от дифференциальных: это, например, оператор запаздывания ⁽²⁾, оператор типа Вольтерра с неинтегрируемой особенностью в ядре ⁽³⁾.

Мы рассмотрим в качестве возмущающего оператора интегральный оператор с ядром типа Коши на гладкой разомкнутой дуге.

Сингулярность возмущения в данном случае связана с тем, что решение возмущенного интегрального уравнения ищется в классе ограниченных функций. Но из общих соображений ⁽⁴⁾ следует, что такое решение с необходимостью обращается в нуль в концах дуги. Однако невозмущенное решение этому условию, вообще говоря, не удовлетворяет. Отсюда и появляется пограничный слой, характерный для решений сингулярно возмущенных задач.

1°. Постановка задачи. Теорема существования, единственности и предельного перехода. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{\varepsilon B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt + \int_L n(t, t_0)\varphi(t) dt = f(t_0), \quad (1)$$

где ε — малый положительный параметр, L — гладкий разомкнутый контур в комплексной плоскости с концами c_1, c_2 . Решение уравнения (1) ищется в классе H -функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на L . Относительно $A(t_0), B(t_0), f(t_0), n(t, t_0)$ будем предполагать следующее: $A(t_0), f(t_0)$ — непрерывно дифференцируемые на L функции, $B(t_0) \in H$ на L , $n(t, t_0)$ — непрерывно дифференцируемая на $L \times L$ функция.

Определим числа α_k следующим образом:

$$\alpha_k = \operatorname{Re} \gamma_k, \quad \gamma_k = (-1)^k \ln G(c_k) / 2\pi i, \\ G(t_0) = (A(t_0) - \varepsilon B(t_0)) / (A(t_0) + \varepsilon B(t_0)), \quad k=1, 2.$$

Определим невозмущенное уравнение, соответствующее (1) ($\varepsilon=0$):

$$A(t_0)\varphi(t_0) + \int_L n(t, t_0)\varphi(t) dt = f(t_0). \quad (2)$$

Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $A(t_0) \neq 0$ на L ;
- 2) $A^2(t_0) - \varepsilon^2 B^2(t_0) \neq 0$ на L ;
- 3) $0 < \alpha_k < 1$, $k=1, 2$;

4) уравнение (2) однозначно разрешимо при любой правой части, и решение его $\varphi_0(t_0)$ не обращается в нуль в концах контура L .

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1)–4).

Тогда для достаточно малых ε существует единственное решение $\varphi(t_0, \varepsilon)$ уравнения (1) в H и имеет место равномерный предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(t_0, \varepsilon) = \varphi_0(t_0)$$

на L' , где L' — часть дуги L , не содержащая концов s_1, s_2 вместе с окрестностями конечной длины d .

Доказательство теоремы 1 основано на методе регуляризации Карлемана, который позволяет вместо уравнения (1) рассматривать уравнение Фредгольма

$$A(t_0)\varphi(t_0) + \int_L n(t, t_0)\varphi(t) dt + \int_L R(t, t_0, \varepsilon)\varphi(t) dt = f^*(t_0). \quad (1')$$

Норма оператора

$$(R\varphi)(t_0) = \int_L R(t, t_0, \varepsilon)\varphi(t) dt$$

может быть оценена в $L_2[L]$ при достаточно малом ε следующим образом:

$$\|R\|_{L_2[L]} \leq C\varepsilon^{1-\nu},$$

где $\alpha < \nu < 1$ ($\alpha > \max(\alpha_1, \alpha_2)$), C — постоянная, не зависящая от ε . Отсюда следует существование и единственность решения возмущенного уравнения (1). Если $\gamma(t, t_0)$ и $\gamma(t, t_0, \varepsilon)$ — резольвенты Фредгольма для уравнений (1), (1') соответственно, то можно показать, что

$$\gamma(t, t_0, \varepsilon) = \gamma(t, t_0) + R(t, t_0, \varepsilon) + \delta(t, t_0, \varepsilon),$$

причем $\delta(t, t_0, \varepsilon)$ равномерно мала на $L \times L$:

$$|\delta(t, t_0, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{1-\nu})$$

Эта оценка позволяет доказать возможность предельного перехода, сформулированного в теореме.

Часть дуги L , на которой отсутствует равномерная сходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения $\varphi(t_0, \varepsilon)$ к $\varphi_0(t_0)$, называется по терминологии (2) пограничным слоем. Поясним причину возникновения пограничного слоя, отмеченную выше: всякое решение $\varphi(t_0, \varepsilon)$ уравнения (1) класса H при выполнении условий 1)–3) necessarily обращается в нуль в концах контура L (4), в то время как невозмущенное решение $\varphi_0(t_0)$ этим свойством, вообще говоря, не обладает.

2°. Итерационный метод. Воспользуемся для приближенного решения уравнения (1) методом последовательных приближений. Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\varphi(t_0, \varepsilon) = \bar{\varphi}(t_0, \varepsilon) + \Pi(t_0, \varepsilon).$$

Используя это представление, запишем уравнение (1) в виде системы

$$\begin{aligned} A(t_0)\bar{\varphi}(t_0) + \int_L n(t, t_0)(\bar{\varphi}(t) + \Pi(t)) dt &= f(t_0), \\ A(t_0)\Pi(t_0) + \frac{\varepsilon B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\bar{\varphi}(t) + \Pi(t)}{t - t_0} dt &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда решение системы (3), если оно существует, дает и решение уравнения (1). Будем решать систему уравнений (2) согласно следующему ите-

рациональному процессу:

$$A(t_0)\bar{\varphi}_k(t_0) + \int_L n(t, t_0) (\bar{\varphi}_k(t) + \Pi_{k-1}(t)) dt = f(t_0),$$

$$A(t_0)\Pi_k(t_0) + \frac{\varepsilon B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\bar{\varphi}_k(t) + \Pi_k(t)}{t - t_0} dt = 0,$$

$$\Pi_0(t_0) \equiv 0, \quad k=1, 2, \dots$$
(4)

Обозначим $\varphi_n(t_0, \varepsilon) = \bar{\varphi}_n(t_0, \varepsilon) + \Pi_n(t_0, \varepsilon)$ и назовем функцию $\varphi_n(t_0, \varepsilon)$ n -м приближением к $\varphi(t_0, \varepsilon)$, а $\bar{\varphi}_n(t_0, \varepsilon)$ и $\Pi_n(t_0, \varepsilon)$ — регулярной и погранслошной функциями n -го порядка соответственно.

Из (4) находим, что $\bar{\varphi}_1(t_0, \varepsilon) = \varphi_0(t_0)$, где $\varphi_0(t_0)$ — решение невозмущенного уравнения (2). Решая уравнение

$$A(t_0)\Pi_1(t_0) + \frac{\varepsilon B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) + \Pi_1(t)}{t - t_0} dt = 0,$$

Находим $\Pi_1(t_0, \varepsilon)$:

$$\Pi_1(t_0, \varepsilon) = (A(t_0)A^*(t_0) - 1)\varphi_0(t_0) - \frac{\varepsilon B^*(t_0)Z(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{A(t)\varphi_0(t)}{Z(t)(t - t_0)} dt,$$

где $Z(t)$ — каноническая функция класса $h(e_1, c_2)$ (4),

$$A^*(t_0) = A(t_0)/A^2(t_0) - \varepsilon^2 B^2(t_0), \quad B^*(t_0) = B(t_0)/A^2(t_0) - \varepsilon^2 B^2(t_0);$$

Следующим шагом определяем $\bar{\varphi}_2(t_0, \varepsilon)$:

$$\bar{\varphi}_2(t_0, \varepsilon) = \varphi_0(t_0) + \int_L \gamma(t, t_0)\Pi_1(t, \varepsilon) dt,$$

где $\gamma(t, t_0)$ — резольвента Фредгольма невозмущенного уравнения (2).

Аналогично определяются функции $\bar{\varphi}_k(t_0, \varepsilon)$ и $\Pi_k(t_0, \varepsilon)$:

$$\bar{\varphi}_k(t_0, \varepsilon) = \varphi_0(t_0) + \int_L \gamma(t, t_0)\Pi_{k-1}(t, \varepsilon) dt,$$

$$\Pi_k(t_0, \varepsilon) = (A(t_0)A^*(t_0) - 1)\bar{\varphi}_k(t_0, \varepsilon) - \frac{\varepsilon B^*(t_0)Z(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{A(t)\bar{\varphi}_k(t)}{Z(t)(t - t_0)} dt.$$

Можно показать, что последовательности $\{\bar{\varphi}_k(t_0, \varepsilon)\}$ и $\{\Pi_k(t_0, \varepsilon)\}$ мажорируются для достаточно малых ε сходящимися геометрическими прогрессиями со знаменателем $q < 1$. Если представить точное решение уравнения (1) в виде

$$\varphi(t_0, \varepsilon) = \bar{\varphi}_n(t_0, \varepsilon) + \Pi_n(t_0, \varepsilon) + \Delta_n(t_0, \varepsilon),$$

то для $\Delta_n(t_0, \varepsilon)$ имеет место оценка

$$|\Delta_n(t_0, \varepsilon)| \leq \frac{K\|\varphi_0\|}{v} \frac{q^n}{1-q}$$

постоянная K зависит от $A(t_0)$, $B(t_0)$ и контура L , $\|\varphi_0\|$ — норма невозмущенного решения уравнения (2) в $C(L)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1.

Тогда для достаточно малых ε приближения n -го порядка

$$\varphi_n(t_0, \varepsilon) = \bar{\varphi}_n(t_0, \varepsilon) + \Pi_n(t_0, \varepsilon)$$

равномерно сходятся на всем контуре L к решению $\varphi(t_0, \varepsilon)$ уравнения (1) и имеет место оценка

$$|\varphi(t_0, \varepsilon) - \varphi_n(t_0, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^{(1-v)n},$$
(5)

где $\alpha < v < 1$ ($\alpha > \max(\alpha_1, \alpha_2)$), C — постоянная, не зависящая от ε и n .

В заключение отметим, что итерационный метод дает последовательные приближения, сходящиеся равномерно к точному решению. В сравнении с асимптотическими оценками ⁽²⁾ соотношение (5) имеет то преимущество, что постоянная C не зависит от n .

Институт физики твердого тела
Академии наук СССР
Черноголовка Московской обл.

Поступило
30 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Н. Тихонов, Матем. сб., т. 31 (73), № 3, 575 (1952). ² А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Асимптотические разложения сингулярно возмущенных уравнений, М., «Наука», 1973. ³ Ю. П. Боглаев, ДАН, т. 218, № 2, 261 (1974). ⁴ Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., «Наука», 1968.