

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ

О КОМПЛЕКСНОМ МЕТОДЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В БАНАХОВЫХ РЕШЕТКАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 23 VII 1975)

Цель заметки — сведение второго комплексного метода Кальдерона в случае банаховых идеальных пространств с полунепрерывными нормами к вещественной конструкции Кальдерона.

Обозначения. Если E — банахово пространство, то $B(E) = \{x \in E: \|x\| \leq 1\}$. $\Pi = \{z: 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $\bar{\Pi} = \{z: 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$. (T, Σ, μ) — пространство с вполне σ -конечной мерой, $S = S(T, \Sigma, \mu)$ — пространство всех комплексных измеримых функций на нем (μ — эквивалентные функции и множества, как обычно, отождествляются). Всюду далее s есть фиксированное число такое, что $0 < s < 1$.

1. В ⁽¹⁾ построены следующие два комплексных метода интерполяции (см. также ⁽²⁾, гл. III, § 4). Пусть E_0, E_1 суть комплексные банаховы пространства, непрерывно вложенные в некоторое топологическое векторное пространство. На пространстве $E_0 + E_1$ рассматриваем обычную норму, превращающую его в банахово пространство.

Первый метод. Рассматривается пространство $\mathcal{A}(E_0, E_1)$ всех функций $\varphi(z)$ ($z \in \bar{\Pi}$) со значениями в $E_0 + E_1$, голоморфных в Π , непрерывных и ограниченных в $\bar{\Pi}$ и таких, что функция $\varphi(j + i\tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$ принимает значения из E_j и непрерывна и ограничена в E_j , $j = 0, 1$. Пространство $\mathcal{A}(E_0, E_1)$ является банаховым относительно нормы

$$\|\varphi\|_{\mathcal{A}} = \max_{j=0,1} \left\{ \sup_{-\infty < \tau < \infty} \|\varphi(j + i\tau)\|_{E_j} \right\}.$$

Через $[E_0, E_1]_s$ обозначается множество всех $x \in E_0 + E_1$, представимых в виде $x = \varphi(s)$, где $\varphi \in \mathcal{A}(E_0, E_1)$. Пространство $[E_0, E_1]_s$ с нормой $\|x\| = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}(E_0, E_1)} \|\varphi\|_{\mathcal{A}}$ является банаховым пространством.

Второй метод. Рассматривается пространство $\mathcal{A}(E_0, E_1)$ всех функций $\varphi(z)$ ($z \in \bar{\Pi}$) со значениями в $E_0 + E_1$, голоморфных в Π , непрерывных в $\bar{\Pi}$, удовлетворяющих неравенству

$$\|\varphi(z)\|_{E_0 + E_1} \leq c(1 + |z|), \quad z \in \bar{\Pi}.$$

и таких, что $\varphi(j + i\tau_2) - \varphi(j + i\tau_1) \in E_j$ при $-\infty < \tau_1, \tau_2 < +\infty$, $j = 0, 1$, причем

$$\|\varphi\|_{\mathcal{A}} = \max_{j=0,1} \left\{ \sup_{-\infty < \tau_1 < \tau_2 < \infty} \left\| \frac{\varphi(j + i\tau_2) - \varphi(j + i\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \right\|_{E_j} \right\} < \infty.$$

Факторизация $\mathcal{A}(E_0, E_1)$ по подпространству констант приводит к банахову пространству, обозначаемому снова через $\mathcal{A}(E_0, E_1)$. Через $[E_0, E_1]^s$ обозначается множество всех $x \in E_0 + E_1$, представимых в виде $x = d\varphi(s)/dz$, где $\varphi \in \mathcal{A}(E_0, E_1)$. Пространство $[E_0, E_1]^s$ с нормой $\|x\| = \inf_{x = \varphi'(s)} \|\varphi\|_{\mathcal{A}}$ является банаховым пространством.

Пространства $[E_0, E_1]_s$ и $[E_0, E_1]^s$ являются интерполяционными между E_0 и E_1 пространствами с нормальным типом s ; эти и другие их свойства можно найти в ^(1, 2).

2. Банаховым идеальным пространством (сокращенно б.и.п.) на (T, Σ, μ) называется банахово пространство X , являющееся векторным подпространством в S и удовлетворяющее условию: если $x \in X$, $y \in S$, $|y| \leq |x|$, то $y \in X$ и $\|y\| \leq \|x\|$. Норма в X называется полунепрерывной, если из $0 \leq x_n \uparrow x \in X$ следует, что $\sup \|x_n\| = \|x\|$. Норма в X называется монотонно полной, если из $0 \leq x_n \uparrow$, $x_n \in X$, $\sup \|x_n\| < \infty$ следует, что $\sup x_n \in X$.

Пусть далее X_0, X_1 суть произвольные б.и.п. на (T, Σ, μ) . Через $X(s) = X_0^{1-s} X_1^s$ обозначается б.и.п., состоящее из всех $x \in S$ таких, что $|x| \leq \leq \lambda_0^{1-s} x_1^s$ для некоторого числа $\lambda \geq 0$ и некоторых $0 \leq x_j \in X_j$ с $\|x_j\|_{X_j} \leq 1$, $j=0, 1$.

Для $x \in X(s)$ за норму $\|x\|_{X(s)}$ принимается инфимум всех возможных λ в предыдущем неравенстве. Эта конструкция введена в ⁽¹⁾ и изучалась также в ⁽³⁻⁵⁾. В ⁽¹⁾ показано, что $[X_0, X_1]_s \subset X(s) \subset [X_0, X_1]^s$ и нормы операторов вложения ≤ 1 ; однако, вообще говоря, эти три пространства различны, даже если нормы в X_0 и X_1 полунепрерывны. Там же показано, что $X_0 \cap X_1$ плотно в $[X_0, X_1]_s$, но, вообще говоря, не плотно в $X(s)$ и $[X_0, X_1]^s$.

3. Пространство $X(s)$, в отличие от $[X_0, X_1]_s$ и $[X_0, X_1]^s$, не является, вообще говоря, интерполяционным между X_0 и X_1 даже если нормы в X_0 и X_1 полунепрерывны; соответствующий пример приведен в ⁽⁶⁾. Однако эта вещественная конструкция существенно проще обеих комплексных методов; исходя из конкретных X_0, X_1 построить $X(s)$ обычно бывает весьма несложно. В ⁽⁷⁾ осуществлена редукция первого комплексного метода к указанной вещественной конструкции и доказана следующая

Теорема (В. А. Шестаков). *Пространство $[X_0, X_1]_s$ совпадает с замыканием множества $X_0 \cap X_1$ в $X(s)$, причем норма в $[X_0, X_1]_s$ совпадает с нормой, индуцированной из $X(s)$.*

Нашей целью является подобная же редукция для второго комплексного метода. В ⁽¹⁾ показано, что если шар $B(X(s))$ замкнут в $X_0 + X_1$, то пространства $X(s)$ и $[X_0, X_1]^s$ и их нормы совпадают. Из результатов ⁽³⁾ следует, что если нормы в X_0 и X_1 полунепрерывны и монотонно полны, то этими же свойствами обладает норма в $X(s)$, а, значит, шар $B(X(s))$ замкнут в $X_0 + X_1$. Из сказанного ясно, что если нормы в X_0 и X_1 полунепрерывны и монотонно полны, то пространства $X(s)$ и $[X_0, X_1]^s$ и их нормы совпадают.

Следующий результат является основным.

Теорема 1. *Если нормы в X_0 и X_1 полунепрерывны, то шар $B([X_0, X_1]^s)$ совпадает с замыканием шара $B(X(s))$ в пространстве $X_0 + X_1$.*

Нам неизвестно, существенно ли требование полунепрерывности норм для справедливости теоремы; заметим, впрочем, что в приложениях оно, как правило, выполняется.

Теорема 2. *Если одно из пространств X_0, X_1 есть $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, то заключение теоремы 1 справедливо без каких бы то ни было ограничений на второе пространство.*

Доказательство теорем 1 и 2 основано на следующей лемме, в которой X_0, X_1 суть любые б.и.п. на (T, Σ, μ) (полунепрерывность норм не требуется).

Лемма. Пусть: а) T_k есть возрастающая последовательность измеримых подмножеств из T , причем $\bigcup_k T_k = T$; б) $0 \leq y_j \in S$, причем $P_k y_j \in X_j$,

где P_k есть оператор умножения на характеристическую функцию T_k , и $\sup_k \|P_k y_j\|_{X_j} < 1$, $j=0, 1$; в) $x = y_0^{1-s} y_1^s \in X_0 + X_1$ и $\|x - P_k y_0^{1-s} y_1^s\|_{X_0 + X_1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Тогда $x \in B([X_0, X_1]^s)$.

Наметим ее доказательство. Можно считать, что носитель x есть все T . Положим $w = r_1 P_1 y_0^{1-s} y_1^s + \sum_{k=2}^{\infty} r_k (P_k - P_{k-1}) y_0^{1-s} y_1^s$, где числа $r_k > 1$ по-

добраны так, что $r_k \uparrow +\infty$ и ряд сходится по норме в $X_0 + X_1$. Тогда $w = w_0 + w_1$, где $w_0 \in X_0$, $w_1 \in X_1$, $w_0 w_1 = 0$. Подберем теперь $\varepsilon > 0$ так, что $\sup_k \|P_k y_j + \varepsilon w_j\|_{X_j} < 1$, $j = 0, 1$. После этого найдем функции $x_j \in S$, $j = 0, 1$ и числа $0 < \lambda_k \uparrow +\infty$ такие, что: а) $0 \leq x_j \leq y_j + \varepsilon w_j$; б) $x_0^{1-s} x_1^s = x$; в) $\max \{x_0(t), x_1(t)\} \geq \lambda_k \min \{x_0(t), x_1(t)\}$ для почти всех $t \in T \setminus T_k$. Затем построим функцию $\varphi: \bar{P} \rightarrow X_0 + X_1$, положив для $z \in \bar{P}$

$$\varphi(z)(t) = \int_{0,5}^z x_0(t)^{1-z} x_1(t)^z dz, \quad t \in T.$$

Оказывается, что $\varphi \in \bar{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$, $\|\varphi\|_{\bar{\mathcal{A}}} \leq 1$, $\varphi'(s) = x$.

Дадим теперь краткую схему доказательства теоремы 1. Пусть U есть замыкание шара $B(X_0^{1-s} X_1^s)$ в $X_0 + X_1$, R — линейная оболочка U , $\|\cdot\|_R$ — функционал Минковского множества U . Тогда $(R, \|\cdot\|_R)$ есть б.и.п. и $B([X_0, X_1]^s) \subset U$ (см. (7)). Фиксируем произвольный $x \in R$ такой, что $\|x\|_R < 1$. Достаточно лишь доказать, что $x \in B([X_0, X_1]^s)$. Можно считать, что $x \geq 0$ и носитель x есть все T . Найдется возрастающая последовательность измеримых множеств $T_k \subset T$ такая, что $\bigcup_k T_k = T$, $P_k x \in B(X(s))$.

$\|x - P_k x\|_{X_0 + X_1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. Так как норма в X_j полунепрерывна, то X_j является подпространством во втором дуальном пространстве X_j'' . Кроме того, так как $(X_0^{1-s} X_1^s)'' = (X_0'')^{1-s} (X_1'')^s$ (см. (3)), то, используя сказанное перед теоремой 1, имеем $U \subset B((X_0'')^{1-s} (X_1'')^s)$. Теперь уже нетрудно построить соответствующие y_0 и y_1 , после чего останется применить лемму.

При доказательстве теоремы 2, если $X_j = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, то применяя лемму, за y_j нужно взять соответствующую константу.

З а м е ч а н и е. Из результатов (7) и нашей теоремы 1 следует, что в условиях теоремы 1 шар $B([X_0, X_1]^s)$ совпадает с замыканием шара $B([X_0, X_1]_s)$ в $X_0 + X_1$. Нам неизвестно, всегда ли шар $B([E_0, E_1]^s)$ совпадает с замыканием шара $B([E_0, E_1]_s)$ в $E_0 + E_1$ для произвольной интерполяционной пары E_0, E_1 .

Ленинградский военный инженерный институт
им. А. Ф. Можайского

Поступило
18 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. P. Calderón, *Studia Math.*, v. 24, № 2, 113 (1964). ² Функциональный анализ (СМБ), под ред. С. Г. Крейна, М., 1972. ³ Г. Я. Лозановский, *Сибирск. матем. журн.*, т. 10, № 3, 584 (1969). ⁴ Г. Я. Лозановский, Там же, т. 13, № 6, 1304 (1972). ⁵ С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Тр. Московск. матем. о-ва*, т. 17, 293 (1967). ⁶ Г. Я. Лозановский, *Функциональный анализ и его приложения*, т. 6, № 4, 89 (1972). ⁷ В. А. Шестаков, *Вестн. ЛГУ*, № 19, 64 (1974).