

М. И. ЛЕВИН, Ю. М. ГИРШОВИЧ, В. К. АРРО

О НАИЛУЧШИХ НА МНОЖЕСТВАХ ФУНКЦИЙ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ

(Представлено академиком С. М. Никольским 15 IX 1975)

В 1950 г. С. М. Никольским ⁽¹⁾ была поставлена следующая экстремальная задача теории квадратурных формул: пусть задано множество H функций $f(x)$; требуется при заданных n и ρ выбрать значения узлов x_k и весов A_{kj} , $k=1, \dots, n$; $j=0, \dots, \rho$, так, чтобы для квадратурной формулы

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{\rho} A_{kj} f^{(j)}(x_k) + R_n(f) \quad (1)$$

величина

$$R_n = \sup_{f \in H} |R_n(f)|$$

была наименьшей. Величина R_n называется точной оценкой остатка формулы (1) на множестве H . Найденная в результате решения этой задачи формула (1) называется наилучшей на множестве H .

В ⁽¹⁾ были решены первые экстремальные задачи теории квадратурных формул, в ⁽²⁾ дан обзор полученных позже основных результатов в этом направлении.

В работе С. М. Никольского ⁽¹⁾ была также, по-видимому, впервые обнаружена связь между квадратурными формулами и кусочно-полиномиальными функциями (сплайнами), исследованная впоследствии в работах И. Шенберга ⁽³⁾, С. Карлина ⁽⁴⁾, Н. П. Корнейчука и Н. Е. Лушная ⁽⁵⁾ и других авторов.

Наибольший интерес представляют задачи нахождения наилучших формул (1) при $\rho=0$. В этом направлении достаточно общий результат получен В. П. Моторным ⁽⁶⁾.

В настоящей работе выяснены некоторые общие факты относительно наилучших квадратурных формул, а затем при их помощи найдены наилучшие формулы (1) при $\rho=0$ для ряда множеств функций.

Пусть $M>0$, $1 \leq q \leq \infty$, $r \geq 1$ заданы. Через $W^{(r)}L_q$ обозначим, согласно ^(1, 2), множество всех функций $f(x)$, которые на отрезке $[0, 1]$ имеют абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и производную порядка r , удовлетворяющую условию $\|f^{(r)}\|_{L_q(0, 1)} \leq M$.

Через $W_U^{(r)}L_q$ обозначим множество всех функций $f(x)$, которые принадлежат множеству $W^{(r)}L_q$ и удовлетворяют условиям

$$U_i(f) = 0, \quad i=1, \dots, s,$$

где $0 \leq s \leq 2r$, а функционалы

$$U_i(f) = \sum_{j=0}^{r-1} [\alpha_{ij} f^{(j)}(0) + \beta_{ij} f^{(j)}(1)], \quad i=1, \dots, s, \quad (2)$$

линейно независимы.

Систему (2) можно продолжить ⁽⁷⁾ до линейно независимой системы $U_1, \dots, U_{2r}$.

Пусть $V_1, \dots, V_{2r}$ — функционалы краевых условий, сопряженных ⁽⁷⁾ к условиям $U_i(f)=0, i=1, \dots, 2r$, относительно дифференциального выражения $y^{(r)}$, а $K_{r,p}(V)$ есть множество всех моносплайнов $K(x)$ вида

$$K(x) = \frac{x^r}{r!} + \sum_{j=0}^{r-1} c_{0,j} x^{r-j-1} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^p c_{kj} (x - t_k)_+^{r-j-1},$$

удовлетворяющих условиям

$$V_i(K)=0, i=1, \dots, 2r-s, \quad t_k \in [0, 1], \quad k=1, \dots, n;$$

здесь $u_+^j = u^j$ при $u \geq 0$ и $u_+^j = 0$ при $u < 0$.

Теорема 1. *Наилучшая на множестве $W_U^{(r)} L_q$ квадрупольная формула (1) при $\rho < r$ имеет узлы, веса и оценку остатка*

$$x_k = t_k^*, \quad A_{kj} = (-1)^j [K_*^{(r-j-1)}(t_k^* - 0) - K_*^{(r-j-1)}(t_k^* + 0)],$$

$$k=1, \dots, n; \quad j=0, \dots, \rho,$$

$$R_n = M \|K_*\|_{L_p(0,1)}, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1,$$

где $K_*(x)$ — моносплайн наименьшего уклонения от нуля на отрезке $[0, 1]$ в метрике L_p из множеств $K_{r,p}(V)$, а $t_k^*, k=1, \dots, n$, — его узлы.

Пусть $m < s$, а $\bar{W}_U^{(r)} L_q$ есть множество всех функций $f(x)$, принадлежащих множеству $W^{(r)} L_q$ и удовлетворяющих условиям

$$U_i(f)=0, \quad i=1, \dots, m.$$

Квадратурные формулы вида

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^p B_{kj} f^{(j)}(u_k) + \sum_{i=m+1}^s b_i U_i(f) + \bar{R}_n(f) \quad (3)$$

назовем формулами типа Маркова.

Теорема 2. *Для того, чтобы формула (1) при $\rho < r$ с узлами $x_k, k=1, \dots, n$, и весами $A_{kj}, k=1, \dots, n; j=0, \dots, \rho$, была наилучшей на множестве $W_U^{(r)} L_q$, необходимо и достаточно, чтобы формула (3) при $\rho < r$ с узлами $u_k = x_k, k=1, \dots, n$, весами $B_{kj} = A_{kj}, k=1, \dots, n; j=0, \dots, \rho$, $b_i = V_{2r+1-i}(K_*)$, $i=m+1, \dots, s$, была наилучшей на множестве $\bar{W}_U^{(r)} L_q$. Для этих формул*

$$\sup_{f \in \bar{W}_U^{(r)} L_q} |\bar{R}_n(f)| = \sup_{f \in W_U^{(r)} L_q} |R_n(f)|.$$

Моносплайн $K_*(x)$ определен в теореме 1. Теорема 2 обобщает результат работы ⁽⁸⁾.

Ниже будем считать r четным. Пусть множества $J_0, J_1 \subseteq \{0, 1, \dots, r-1\}$. С помощью теорем 1 и 2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Единственная наилучшая на множестве $W^{(r)} L_q$ квадратурная формула типа Маркова*

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{j \in J_0} a_{jf}^{(j)}(0) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{r-2} A_{kj} f^{(j)}(x_k) + \sum_{j \in J_1} b_{jf}^{(j)}(1) + R_n(f)$$

определяется следующими значениями узлов и весов:

$$x_k = [\delta_0 + 2(k-1)]h, \quad k=1, \dots, n;$$

$$A_{ij} = \frac{1}{r!} [R_{r,p}^{(r-1-j)}(1) h^{j+1} + (-1)^j T_{J_0, r, p}^{(r-1-j)}(1) x_1^{j+1}],$$

$$A_{kj} = \frac{1}{r!} R_{r,p}^{(r-1-j)}(1) h^{j+1} [1 + (-1)^j], \quad k = 2, \dots, n-1,$$

$$A_{nj} = \frac{1}{r!} [T_{J_1, r, p}^{(r-1-j)}(1) (1-x_n)^{j+1} + (-1)^j R_{r,p}^{(r-1-j)}(1) h^{j+1}], \quad j = 0, \dots, r-2;$$

$$a_j = \frac{(-1)^{j+1}}{r!} x_1^{j+1} T_{J_0, r, p}^{(r-1-j)}(0), \quad j \in J_0;$$

$$b_j = -\frac{1}{r!} (1-x_n)^{j+1} T_{J_1, r, p}^{(r-1-j)}(1), \quad j \in J_1,$$

где

$$h = (2n-2+\delta_0+\delta_1)^{-1}, \quad \delta_i = [R_{r,p}(1)/T_{J_i, r, p}(1)]^{1/r}, \quad i=0, 1,$$

$R_{r,p}(x)$ — многочлен наименьшего отклонения от нуля на $[-1, 1]$ в метрике $L_{p,p^{-1}+q^{-1}=1}$, среди всех многочленов степени r со старшим коэффициентом 1, $T_{J_i, r, p}(x)$ — многочлен наименьшего отклонения от нуля на $[0, 1]$ в L_p среди всех многочленов $T(x)$ степени r со старшим коэффициентом 1 и удовлетворяющих условиям

$$T^{(j)}(0) = 0, \quad j \in \{0, \dots, r-1\}, \quad r-1-j \notin J_i.$$

Точная оценка остатка этой формулы есть

$$R_n = \frac{MR_{r,p}(1)}{r!(rp+1)^{1/p}} h^r.$$

Примечание. В силу теоремы 2 формула, найденная в теореме 3, является наилучшей и на множестве функций $f(x)$, принадлежащих $W^{(r)}L_q$ и удовлетворяющих условиям

$$f^{(i)}(0) = 0, \quad i \in J_0, \quad f^{(j)}(1) = 0, \quad j \in J_1.$$

Теорема 3 обобщает соответствующие результаты работ ⁽⁹⁻¹⁴⁾. Определим следующие множества функций:

$$F_1 = \{f(x): f \in W^{(r)}L_2, \quad f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0 \quad (i=0, 1, 3, 5, \dots, r-3)\},$$

$$F_2 = \{f(x): f \in F_1, \quad f^{(r-1)}(0) = f^{(r-1)}(1) = 0\},$$

$$F_3 = \{f(x): f \in W^{(r)}L_2, \quad f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0, \quad (i=1, 3, 5, \dots, r-1)\},$$

$$F_4 = \{f(x): f \in W^{(r)}L_2, \quad f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) \quad (i=1, 3, 5, \dots, r-1)\}.$$

Теорема 4. Единственная наилучшая на множестве F_1 формула

$$\int_0^1 f(x) dx = \alpha f^{(r-1)}(0) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \beta f^{(r-1)}(1) + R_n(f)$$

имеет узлы, веса

$$x_k = \frac{k}{n+1}, \quad A_k = \frac{1}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n, \quad \alpha = -\beta = \frac{B_r}{r!(n+1)^r},$$

и точную оценку остатка

$$\sup_{f \in F_1} |R_n(f)| = \frac{M}{(n+1)^r} \sqrt{\frac{-B_{2r}}{(2r)!}}, \quad (4)$$

где B_n — числа Бернулли.

При доказательстве этой теоремы используются интегральное представление остатка квадратурной формулы через функцию Грина ⁽¹¹⁾ и теорема И. Шенберга и С. Карлина ^(15, 16).

Из теорем 2 и 4 следует

Теорема 5. Единственная наилучшая на множестве F_2 формула

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f)$$

имеет узлы $x_k = k/(n+1)$, веса $A_k = 1/(n+1)$, $k=1, \dots, n$, и точную оценку остатка, равную значению (4).

Следствием теорем 2 и 5 является

Теорема 6. Единственная наилучшая на множестве F_3 формула

$$\int_0^1 f(x) dx = Bf(0) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + Cf(1) + R_n(f) \quad (5)$$

имеет узлы $x_k = k/(n+1)$, веса $A_k = 1/(n+1)$, $k=1, \dots, n$, $B=C=1/2(n+1)$ и точную оценку остатка, равную значению (4).

Следствием теорем 2 и 6 является

Теорема 7. Единственная наилучшая на множестве F_4 формула (5) имеет узлы $x_k = k/(n+1)$ веса $A_k = 1/(n+1)$, $k=1, \dots, n$, $B=C=1/2(n+1)$ и точно оценку остатка, равную значению (4).

Таллинский
политехнический институт

Поступило
12 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. М. Никольский, УМН, т. 5, 2 (36), 165 (1950). ² С. М. Никольский, Квадратурные формулы, М., 1974. ³ I. J. Schoenberg, Theory and Applications of Spline Functions, N. Y.—London, 1969, p. 157. ⁴ S. Karlin, J. Approxim. Theory, v. 4, 1, 59 (1971). ⁵ Н. П. Корнейчук, Н. Е. Лушпай, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 33, 6, 1416 (1969). ⁶ В. П. Моторный, ДАН, т. 211, № 5, 1060 (1973). ⁷ М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, М., 1969. ⁸ М. Левин, Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., т. 21, 4, 449 (1972). ⁹ М. Б. Аксень, А. Х. Турецкий, ДАН, т. 166, № 5, 1019 (1966). ¹⁰ Н. В. Гребенюк, Научн. зап. Сб. работ асп. Днепропетровск. гос. ун-та (матем., механ.), стр. 67, 1970. ¹¹ М. Левин, Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., т. 19, 4, 407 (1970). ¹² В. М. Алхимова, ДАН, т. 204, № 2, 263 (1972). ¹³ А. Йыги, Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., т. 22, 4, 358 (1973). ¹⁴ М. Левин, М. Левина, Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., т. 24, 1, 15 (1975). ¹⁵ S. Karlin, Approximation with Special Emphasis on Spline Functions, N. Y.—London, 1969, p. 467. ¹⁶ S. Karlin, Ch. Micchelli, Israel J. Math., v. 11, 405 (1972).