

А. Д. ИСКЕНДЕРОВ

МНОГОМЕРНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 1 IV 1975)

Для рассмотренных ниже многомерных обратных задач при довольно общих предположениях имеет место теорема единственности; построением мажоранты модуля непрерывности соответствующих обратных операторов получены оценки устойчивости. Решение этих задач можно найти методом последовательных приближений, сходящихся со скоростью $M^*s^{-1}[s!]^{-1/2}$, где s — шаг итерации, M — положительное число, не зависящее от s *. Везде дополнительная информация имеет размерность восстанавливаемых коэффициентов уравнения. В работах (1-4) и др. также рассмотрены различные обратные задачи для линейных и квазилинейных параболических уравнений.

Пусть D — ограниченная область $(n+1)$ -мерного евклидова пространства, с достаточно гладкой границей Γ , ν — направление внутренней нормали границы, D_0 — проекция области D в n -мерное пространство, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ — произвольные точки областей D_0 и D соответственно, $\Omega = D \times (0, T]$, $\Omega_0 = D_0 \times (0, T]$, $S = \Gamma \times [0, T]$, $T > 0$ — заданное число.

1. Линейные параболические уравнения. Рассмотрим задачу об определении функций $\{a(x, t), u(x, y, t)\}$ в области Ω , удовлетворяющих уравнению

$$u_t - a(x, t)\Delta u = h(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega, \quad (1)$$

и следующим дополнительным условиям на частях ее границы:

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}; \quad (2)$$

$$u(x, y, t)|_S = f(\xi, \eta, t), \quad f(\xi, \eta, 0) = \varphi(x, y)|_\Gamma, \quad (\xi, \eta, t) \in S; \quad (3)$$

$$a(x, t)u_\nu(x, y, t)|_S = g(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta, t) \in S, \quad (4)$$

где $h(x, y, t) \in C_{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega})$, $\varphi(x, y) \in C_{2+\alpha}(D) \cap C(\bar{D})$, $f(\xi, \eta, t) \in C_{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S)$, $g(\xi, \eta, t) \in C_{\alpha, \alpha/2}(S)$, $0 < \alpha < 1$, — заданные функции.

Эту задачу назовем задачей 1.

Определение 1. Функции $\{a(x, t), u(x, y, t)\}$ назовем решением задачи 1, если:

- 1) $a(x, t) > 0$ и $a(x, t) \in C(\bar{\Omega}_0)$;
- 2) $u(x, y, t) \in C_{2,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и существуют пределы функций $u_{x_i}(x, y, t)$, $i=1, 2, \dots, n$, при $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta) \in \Gamma$;
- 3) удовлетворяются условия (1) — (4).

Через M обозначим множество решений, для которых $u(x, y, t)$ имеет ограниченные в $\bar{\Omega}$ производные по x и y до второго порядка. Пусть существует достаточно гладкая функция $F(x)$ такая, что уравнение поверхности Γ может быть представлено в виде $y = F(x)$.

* Указываются достаточные условия для справедливости этого факта. Методом последовательных приближений строится регуляризующий алгоритм в случае неустойчивости задачи.

Теорема 1. Если $g(\xi, \eta, t) \neq 0$, то задача 1 на множестве не может иметь более одного решения.

Теорема 2. Пусть $g(\xi, \eta, t) \neq 0$, $\{a_1(x, t), u_1(x, y, t)\}$ является решением задачи 1 с данными h_1, φ_1, f_1, g_1 , которые удовлетворяют всем условиям, наложенным на функции h, φ, f, g соответственно, а величины $\|h - h_1\|_C, \|\varphi - \varphi_1\|_{C_2}, \|f - f_1\|_{C_{2,1}}, \|g - g_1\|_C$ меньше $\delta > 0$.

Тогда выполняются оценки

$$|a(x, t) - a_1(x, t)| < N\delta, \quad |u(x, y, t) - u_1(x, y, t)| < N\delta,$$

N — положительное число, определяемое данными задачи 1 и множеством M .

Доказательство проводится составлением задачи (вычитая соответствующие уравнения) для разности двух решений: $\lambda = a - a_1, v = u - u_1$, откуда, используя оценки функции Грина ⁽⁵⁾ для $\chi(t) = \max_x |\lambda(x, t)|$, получается неравенство типа Беллмана — Гронуолла со свободным членом, стремящимся к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Решение задачи 1 можно найти методом последовательных приближений; для этого выбирается некоторая строго положительная функция $a^{(0)}(x, t) \in C_{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega}_0)$ и при $s=0$ рассматривается следующая задача об определении функции $u^{(1)}(x, y, t)$:

$$u_i^{(s+1)} - a^{(s)}(x, t) \Delta u^{(s+1)} = h(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega; \quad (5)$$

$$u^{(s+1)}(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}; \quad u^{(s+1)}(x, y, t)|_{s=f(\xi, \eta, t)}, \\ (\xi, \eta, t) \in S, \quad (6)$$

Далее, по функции $u^{(1)}(x, y, t)$ из условия

$$a^{(s+1)}(x, t) u_v^{(s+1)}(x, y, t)|_s = g(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta, t) \in S, \quad (7)$$

при $s=0$ определяется $a^{(1)}(x, t)$, и эта функция используется для проведения следующего шага итерации по схеме (5) — (7) при $s=1$ и т. д.

Методом последовательных приближений строится регуляризующий алгоритм для нахождения решения задачи 1. При дополнительных ограничениях на данные задачи для скорости сходимости имеет место оценка $N^s(s+1)^{-1}[s!]^{-1/2}$, где $N > 0$ не зависит от шага итерации s . Кроме того, методом последовательных приближений доказывается

Теорема 3. Пусть $h(x, y, t) \in C_{2,1}(\bar{\Omega})$, $\Delta h \geq 0$, $\Delta \varphi = 0$, $f_i(\xi, \eta, 0) = h(\xi, \eta, 0)$, $f_i(\xi, \eta, t) \geq h(\xi, \eta, t)$, $g(\xi, \eta, t) < 0$, $(\xi, \eta) \in \Gamma$, для решения задачи $\Delta f = 0$ $f|_{\Gamma} = f(\xi, \eta, t)$ выполняется оценка $f_v|_{\Gamma} < 0$ (f зависит от t как от параметра).

Тогда задача 1 имеет единственное решение.

2°. Квазилинейные параболические уравнения. Задача 2. Пусть теперь из уравнения

$$u_t - a(x, u) \Delta u = h(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega, \quad (8)$$

условия (2), (3) и

$$a(x, u) u_v(x, y, t)|_s \quad (9)$$

требуется определить $\{a(x, u), u(x, y, t)\}$. Здесь функции h, φ, f, g такие же, как в задаче 1.

Определение 2. Функции $\{a(x, u), u(x, y, t)\}$ назовем решением задачи 2, если:

1) $a(x, u) > 0$ и $a(x, u) \in C(\bar{\Pi})$, где $\bar{\Pi} = \{(x, u): x \in \bar{D}, u \in [R_1, R_2]\}$, R_i — некоторые числа, $i=1, 2$;

2) $u(x, y, t) \in C_{2,1}(\Omega) \cap C(\Omega)$, $R_1 \leq u(x, y, t) \leq R_2$ и существуют пределы функций $u_{x_i}(x, y, t)$, $i=1, 2, \dots, n$, при $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta) \in \Gamma$.

3) удовлетворяются соотношения (8), (2), (3), (9).

Пусть функции f зависят только от t , т. е. $f=f(t)$ и $r_1(t)=\min_{0 \leq \tau \leq t} f(\tau)$, $r_2(t)=\max_{0 \leq \tau \leq t} f(\tau)$. Предположим, что коэффициент $a(x, u)$ в области

$\Pi \setminus \bar{D} \times [r_1(T), r_2(T)]$ является заданным. Через M_1 обозначим множество решений задачи 2, для которых $a(x, u) \in C_{\alpha, 1+\alpha}(\bar{\Pi})$, $u(x, y, t)$ имеет ограниченные производные по x и y до второго порядка, и если значение функции $u(x, y, t)$ попадает в отрезок $[r_1(T), r_2(T)]$, то выполняется оценка $r_1(t) \leq u(x, y, t) \leq r_2(t)$. Можно указать различные достаточные условия на данные задачи, обеспечивающие принадлежность решения множеству M_1 . При принятых предложениях для задачи 2 на множестве M_1 имеет место утверждение теорем 1–3. Метод последовательных приближений для нахождения решения задачи 2 применяется по схеме, аналогичной (5)–(7); при этом на каждом шагу итерации пользуются предположением о существовании обратной к $f(t)$ функции $\Phi(f)$ и доказывают те же утверждения, что и для схемы (5)–(7).

3°. Задачи с двумя неизвестными коэффициентами. Пусть теперь D — ограниченная, двусвязная область с достаточно гладкими границами Γ и Γ_0 , $S_0 = \Gamma_0 \times [0, T]$. Если D — односвязная область, то Γ_0 предполагается внутренней, замкнутой, достаточно гладкой поверхностью, не пересекающейся с границей Γ .

Задача 3. Требуется определить функции $\{a(x, t), c(x, t), u(x, y, t)\}$ из следующих условий:

$$u_t - a(x, t) \Delta u + c(x, t) u = h(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega; \quad (10)$$

$$u(x, y, t)|_S = f(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta, t) \in S; \quad u(x, y, t)|_{S_0} = f_0(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta, t) \in S_0; \quad (11)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}; \quad f(\xi, \eta, 0) = \varphi(x, y)|_\Gamma, \quad f_0(\xi, \eta, 0) = \varphi(x, y)|_{\Gamma_0}, \quad (12)$$

$$a(x, t) u_\nu(x, y, t)|_S = g(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta, t) \in S, \quad (13)$$

$$a(x, t) u_\nu(x, y, t)|_{S_0} = c(\xi, t) \psi(\xi, \eta, t) + g_0(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta, t) \in S_0, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} h(x, y, t) &\in C_{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega}), \quad \varphi(x, y) \in C_{2+\alpha}(D) \cap C(\bar{D}), \\ f(\xi, \eta, t) &\in C_{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S), \quad f_0(\xi, \eta, t) \in C_{2+\alpha, 1+\alpha/2}(S_0) \\ g(\xi, \eta, t) &\in C_{\alpha, \alpha/2}(S), \quad \psi(\xi, \eta, t) \in C_{\alpha, \alpha/2}(S_0), \quad g_0(\xi, \eta, t) \in C_{\alpha, \alpha/2}(S_0) \end{aligned}$$

заданные функции.

Определение 3. Функции $\{a(x, t), c(x, t), u(x, y, t)\}$ назовем решением задачи 3, если:

1) $a(x, t)$ и $u(x, y, t)$ удовлетворяют условиям 1), 2) определения 1,

2) $c(x, t) \in C(\bar{\Omega}_0)$ и удовлетворяются уравнения (10)–(14).

Теорема 4. Если $g(\xi, \eta, t) \neq 0$, $\psi(\xi, \eta, t) \neq 0$, то задача 3 на множестве M не может иметь более одного решения.

Теорема 5. Пусть $g(\xi, \eta, t) \neq 0$, $\psi(\xi, \eta, t) \neq 0$, $\{a_1(x, t), c_1(x, t), u_1(x, y, t)\}$ является решением задачи 3 с данными $h_1, \varphi_1, f_1, f_{01}, g_1, \psi_1, g_{01}$, которые удовлетворяют всем условиям, наложенным на $h, \varphi, f, f_0, g, \psi, g_0$ соответственно, а величины $\|h-h_1\|_C, \|\varphi-\varphi_1\|_{C_2}, \|f-f_1\|_{C_{2,1}}, \|f_0-f_{01}\|_{C_{2,1}}, \|g-g_1\|_C, \|\psi-\psi_1\|_C, \|g-g_{01}\|_C$ меньше $\delta > 0$; тогда выполняются оценки

$$|a(x, t) - a_1(x, t)| < N\delta, \quad |c(x, t) - c_1(x, t)| < N\delta,$$

$$|u(x, y, t) - u_1(x, y, t)| < N\delta,$$

где $N > 0$ определяется данными задачи 3 и множеством M .

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 3, где вместо f следует взять решение задачи

$$\Delta \tilde{f} = 0, \quad \tilde{f}|_{\Gamma} = f(\xi, \eta, t), \quad \tilde{f}|_{\Gamma_0} = f_0(\xi, \eta, t).$$

Кроме того, пусть $\psi \neq 0$, $\psi g_0 \leq 0$, $\psi \tilde{f}_v|_{\Gamma_0} \geq 0$.

Тогда задача 3 имеет единственное решение.

При более общих предположениях имеет место «локальная» теорема существования. В соответствии с задачами 2, 3 исследуется задача об определении неизвестных коэффициентов $a(x, u)$, $c(x, u)$.

Если $a(x, t)$ — заданная функция, то в задаче 3 отпадает необходимость задания условия (13) и в этом случае (назовем ее задачей 3.1), утверждения теорем 4 и 5 имеют место на множестве решений, описываемом определением 3.

Теорема 7. Пусть $\psi(\xi, \eta, t) \neq 0$, тогда существует такое число $t_0 > 0$, что задача 3.1 при $(x, y) \in \bar{D}$, $0 \leq t \leq t_0$ имеет единственное решение.

4°. З а м е ч а н и я. 1) Изложенным выше способом исследуются задачи об определении коэффициентов младших производных, линейных и квазилинейных параболических уравнений. 2) Рассмотренные выше задачи исследуются также в неограниченных областях. Если D — все пространство, то в качестве дополнительного условия можно задавать $u(x, 0, t)$ или $u_y(x, 0, t)$. 3) Везде вместо $h(x, y, t)$ можно брать достаточно гладкую функцию $h(x, y, t, u, u_x, a)$ с квадратичным ростом относительно u_x .

Во всех задачах вместо Δ можно брать эллиптический оператор с коэффициентами из Гёльдеровых пространств.

Автор искренне благодарен чл.-корр. АН СССР М. М. Лаврентьеву за внимание к работе.

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
24 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. М. Лаврентьев, В. Г. Васильев, В. Г. Романов, Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений, 1969. ² М. М. Лаврентьев, К. Г. Резницкая, ДАН, т. 208, № 3, 531 (1973). ³ А. Д. Искендеров, Дифференциальные уравнения, т. 7, № 10 (1971). ⁴ А. Д. Искендеров, Там же, т. 10, № 5 (1974). ⁵ О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, 1967.