

УДК 518:517.944/947

МАТЕМАТИКА

Н. Н. КУЗНЕЦОВ

ОБ УСТОЙЧИВЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 11 IX 1975)

Мы приведем здесь результаты по обоснованию сходимости и оценке точности некоторого класса приближенных методов решения задачи Коши для многомерного квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial \varphi_s(v)}{\partial x_s} = 0, \quad (1)$$

включающего, в частности, метод исчезающей вязкости, метод сглаживания, ряд широко употребительных конечно-разностных методов.

Мы рассматриваем ограниченные слабые решения уравнения (1) в полупространстве $\{t \geq 0\} \times E_n$, удовлетворяющие начальному условию с ограниченной измеримой начальной функцией (определение слабого решения дано, например, в статье ⁽¹⁾; там же приведены основные свойства слабых решений, используемые здесь). Ограничиваясь случаем гладких функций φ_s , соответствующим гиперболическому характеру уравнения (1), мы без ущерба для общности рассматриваем в дальнейшем лишь решения, принадлежащие при каждом $t \geq 0$ пространству $L_1(E_n)$. Кроме того, из множества эквивалентных решений мы выбираем те, которые непрерывны по t в смысле $L_1(E_n)$ в каждой точке полупрямой $t \geq 0$.

Пусть $K(A) = \{v | v \in L_1(E_n), |\varphi_s'(v)| \leq A\}$. Обозначая D_i^δ оператор сдвига $v(\dots x_i \dots) \rightarrow v(\dots x_i + \delta \dots)$ и $\|\cdot\|$ — норму в $L_1(E_n)$, введем модули непрерывности

$$\lambda_i(\delta; v) = \|D_i^\delta v - v\|, \quad \lambda(\delta; v) = \sum_{i=1}^n \sup_{|\alpha| \leq \delta} \lambda_i(\alpha; v),$$

$$\nu_i(\delta; v) = \sup_{|\alpha| \leq \delta, \alpha \geq -t} \|v(t+\alpha) - v(t)\|, \quad v: t \rightarrow v(t) \in L_1, \quad t \geq 0.$$

Если $v: t \rightarrow v(t)$ — решение (1), причем $v(0) \in K(A)$, то, как известно, $v(t) \in K(A)$, $\lambda_i(\delta; v(t)) \leq \lambda_i(\delta; v(0))$ и $\nu_i(\delta; v) \leq \lambda_A'(|\delta|; v(0))$, где $\lambda_A' = \inf_{\varepsilon} (2\lambda(\varepsilon; 0) + A\delta e^{-1}\lambda(\varepsilon; v))$. В случае, когда $v(0)$ имеет ограниченную вариацию (по Тонелли — Чезари), $\text{var } v(t) \leq \text{var } v(0)$. Наконец, для любых решений v_1 и v_2

$$\|v_1(t) - v_2(t)\| \leq \|v_1(0) - v_2(0)\|.$$

Обозначим U пространство, элементами которого являются функции $u: t \rightarrow u(t)$, заданные на $[0, \infty)$ со значениями в $L_1(E_n)$, для которых существуют предельные значения $u(t \pm 0)$ и которые мы для определенности считаем непрерывными справа. Для функций из U , наряду с модулем непрерывности ν_i , будем использовать

$$\nu_i^\pm(\delta; u) = \sup_{0 < \alpha < \delta} \|u(t \pm \alpha) - u(t \pm 0)\|.$$

Пусть $K_\tau(A)$, $0 < \tau < \tau_0$, — семейство подмножеств $K(A)$ и пусть для каждого τ на K_τ задан оператор (метод) S_τ , сопоставляющий каждому $u \in K_\tau$ элемент $u_\tau \in U$. Иными словами, на $[0, \infty)$ задана операторная функция $S_\tau: t \rightarrow S_\tau(t)$, где $S_\tau(t): u \rightarrow u_\tau(t) = S_\tau(t)u$, $u \in K_\tau$. Разрешающий оператор задачи Коши для уравнения (1) обозначим S_0 ($S_0: v(0) \rightarrow v(t) = S_0(t)v(0)$).

О п р е д е л е н и е 1. Метод S_τ называем устойчивым (в L_1), если для всех $t \geq 0$ и $u \in K_\tau(A)$ выполнены следующие условия:

- а) $S_\tau(t)u \in K(A)$;
- б) $\|S_\tau(t)u - S_\tau(t)u'\| \leq \|u - u'\| \quad \forall u' \in K_\tau(A)$;
- в) $\lambda_i(\delta; S_\tau(t)u) \leq \lambda_i(\delta; u)$.

З а м е ч а н и е. Если метод S_τ , подобно S_0 , однороден в том смысле, что $S_\tau D_i^\delta = D_i^\delta S_\tau$, то неравенство в) есть следствие неравенства б).

Определим понятие погрешности метода S_τ . Для этого введем пространство M дифференцируемых на E_{n+1} функций переменных t, x с ограниченными производными $\mathcal{D}_0 g = g_t$, $\mathcal{D}_i g = g_{x_i}$ и его подпространство

$$M_0 = \{g | g \in M, \|\mathcal{D}_0 g\| < \infty, \|\mathcal{D}_i g\| < \infty\}, \quad \|g\| = \int_{E_{n+1}} |g| dt dx.$$

Обозначим, кроме того, $M_0^+ = \{g | g \in M_0, g \geq 0\}$.

Введем на пространстве M форму, значение которой на элементе $g \in M$ равно

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}}_i(u; a; g) = & - \iint_{\substack{0 < t < t_1, \\ x \in E_n}} \left\{ g_t |u - a| + \sum_s g_{x_s} \operatorname{sgn}(u - a) (\varphi_s(u) - \varphi_s(a)) \right\} dt dx + \\ & + \int_{E_n} g(t_1, x) |u(t_1 - 0, x) - a| dx - \int_{E_n} g(0, x) |u(0, x) - a| dx \end{aligned}$$

(a — любое вещественное число, $u \in U$). Сопоставляя функции $g \in M_0$ функцию $\bar{g}(t', x')$, определяемую соотношением $\bar{g}(t', x'; t, x) = g(t' - t, x' - x)$, и замечая, что $\hat{\mathcal{E}}_i(u; z(t, x); \bar{g}(t, x))$ интегрируемая в слое $\pi_{t_1} = \{0 < t < t_1, x \in E_n\}$ для любого $z \in U$, введем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(u; z; g) = & \frac{1}{2} \iint_{\pi_{t_1}} \hat{\mathcal{E}}_i(u; z(t, x); \bar{g}(t, x)) dt dx + \\ & + \frac{1}{2} \left| \iint_{\pi_{t_1}} \hat{\mathcal{E}}_i(u; z(t, x); \bar{g}(t, x)) dt dx \right|, \quad g \in M_0^+, \end{aligned}$$

О п р е д е л е н и е 2. Погрешностью метода S_τ в слое π_{t_1} называем форму $\mathcal{E}_i(u_\tau; v; g)$ на M_0^+ , где $v = S_0 v^0$, $u_\tau = S_\tau u^0$, u^0 и v^0 — любые элементы $K_\tau(A)$ и $K(A)$ соответственно.

Отметим, что для любого точного решения z уравнение (1) $\mathcal{E}_i(z; v; g) = 0$, так как $\hat{\mathcal{E}}_i(z; a; g) \leq 0$ для любого a и любого $g \in M_0^+$ (см. (1)). Если для любого $g \in M_0^+$ и любых u^0, v^0 $\mathcal{E}_i(u_\tau; v; g) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$, метод S_τ естественно рассматривать как приближенный метод решения уравнения (1).

Оценка точности приближенных методов основана на следующей теореме.

Т е о р е м а 1. Для любого $u \in U$ и любого решения v уравнения (1) при всех $t > 0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|u(t - 0) - v(t)\| \leq & \|u(0) - v(0)\| + 2\lambda(\varepsilon; v(0)) + \\ & + \lambda_A'(\varepsilon_0; v(0)) + \frac{v_i^-(\varepsilon_0; u) + v_0^+(\varepsilon_0; u)}{2} + \mathcal{E}_i(u; v; g_{\varepsilon_0, \varepsilon}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$, $t > \varepsilon_0 > 0$, $g_{\varepsilon_0, \varepsilon}(t, x) = \omega_{\varepsilon_0}(t) \omega_\varepsilon(x_1) \dots \omega_\varepsilon(x_n) = \omega_{\varepsilon_0}(t) \Omega_\varepsilon(x)$, $\omega_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} \omega(\varepsilon^{-1}t)$, $\omega(t) = \omega(-t) \geq 0$, $\omega(t) = 0$ при $|t| \geq 1$, $\int_{E_1} \omega(t) dt = 1$.

Доказательство легко следует из неравенства

$$\mathcal{E}_\tau(v; u(t, x); \bar{g}_{\varepsilon_0, \varepsilon}(t, x)) \leq 0 \quad \forall (t, x) \in \Pi_{t_1}.$$

Теорема 2. Пусть метод S_τ устойчив и его погрешность для точного решения v допускает оценку

$$\mathcal{E}_\tau(u_\tau; v; g) \leq \tau t \sum_{s=1}^n B_s \|\mathcal{D}_s g\| \operatorname{var} u_\tau(0). \quad (3)$$

Тогда для всех $t > 0$

$$\|u_\tau(t) - v(t)\| \leq \|u_\tau(0) - v(0)\| + \inf_{\varepsilon} \left[2\lambda(\varepsilon; v(0)) + \frac{\tau + B}{\varepsilon} \operatorname{var} u_\tau(0) \right], \quad (4)$$

$$B = \sum_{s=1}^n B_s.$$

Действительно, подставляя (3) в (2), полагая затем $2\omega(0) = 1$ и устремляя $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, после минимизации неравенства по ε получаем (4). В качестве примеров приближенных методов, удовлетворяющих условиям теоремы 2, можно привести метод исчезающей вязкости (см. (2)), состоящий в замене уравнения (1) уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial \Phi_s(v)}{\partial x} = \tau \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_s^2} \quad (5)$$

метод сглаживания (см. (3)) и так называемый метод распада разрывов. Пусть u_τ — решение уравнения (5) и $u_\tau(0) = v(0) = v^0$. Тогда $\mathcal{E}_\tau(u_\tau; v; g_{\varepsilon_0, \varepsilon}) \leq 2\omega(0)\varepsilon^{-1}\tau \operatorname{var} u(0)$, так что (4) выполнено с $B = 1$. В случае, когда $\operatorname{var} v^0 < \infty$, (4) сводится к оценке

$$\|u_\tau(t) - v(t)\| \leq \sqrt{8t\tau} \operatorname{var} v^0; \quad (6)$$

в общем случае, заменяя сначала v^0 средней функцией $v_\varepsilon^0 = \Omega_\varepsilon * v^0$, применяя (6) и используя неравенство $\operatorname{var} v_\varepsilon^0 \leq \varepsilon^{-1}\lambda(\varepsilon; v^0)$, получаем оценку

$$\|u_\tau(t) - v(t)\| \leq \inf_{\varepsilon} (2\lambda(\varepsilon; v^0) + \sqrt{8t\tau}\varepsilon^{-1}\lambda(\varepsilon; v^0)) \leq \operatorname{const} \cdot \lambda(\sqrt{t\tau}; v^0).$$

Если u_τ — приближенное решение, получаемое методом сглаживания (τ — радиус сглаживания), то $\mathcal{E}_\tau(u_\tau; v; g_{\varepsilon_0, \varepsilon}) \leq k\omega(0)\tau \operatorname{var} u_\tau(0)$, где $k\tau$ — промежуток между последовательными сглаживаниями и где предполагается, что сглаживание производится с ядром Ω_τ . Учитывая, что $\|u_\tau(0) - v^0\| \leq \lambda(\tau; v^0)$ и $\operatorname{var} u_\tau(0) \leq \tau^{-1}\lambda(\tau; v^0)$, получаем из (4) оценку

$$\|u_\tau(t) - v(t)\| \leq \lambda(\tau; v^0) + \inf_{\varepsilon} \left\{ 2\lambda(\varepsilon; v^0) + k\omega(0)t \frac{\lambda(\tau; v^0)}{\varepsilon} \right\}.$$

Аналогичную оценку допускает и метод распада разрывов.

Пусть P_τ — линейный оператор в $L_1(E_n)$ и $K_\tau(A) = P_\tau K(A)$. Предположим, что P_τ удовлетворяет следующим условиям:

$$\|P_\tau u\| \leq \|u\|, \quad \operatorname{var} P_\tau u \leq \operatorname{var} u, \quad \|P_\tau u - u\| \leq D\tau \operatorname{var} u$$

(при этом для функций с $\operatorname{var} u = \infty$ $\|P_\tau u - u\| \leq \lambda_{D'}(\tau; u)$).

Теорема 3. Пусть $u_\tau = S_\tau P_\tau v^0$, метод S_τ устойчив и, кроме того, удовлетворяет условию

$$v_t(\delta; u_\tau) \leq C(\delta + \tau) \operatorname{var} u_\tau(0), \quad (7)$$

а его погрешность для решения $v = S_0 v^0$ допускает оценку

$$\mathcal{E}_\tau(u_\tau; v; g) \leq \tau t \left(B_0 \|\mathcal{D}_0 g\| + \sum_s B_s \|\mathcal{D}_s g\| \right) \operatorname{var} u_\tau(0). \quad (8)$$

Тогда для всех $t > 0$

$$\|u_\tau(t) - v(t)\| \leq \inf_{\varepsilon} [2\lambda(\varepsilon; v^0) + (C_0\tau + C_1\sqrt{t\tau})\varepsilon^{-1}\lambda(\varepsilon; v^0)],$$

где $C_0 = C + D$, $C_1 = 2\sqrt{B} + 2\sqrt{(A+C)B_0}$. В частности, при $\text{var } v^0 < \infty$

$$\|u_\tau(t) - v(t)\| \leq (C_0\tau + C_1\sqrt{t\tau}) \text{var } v^0.$$

В качестве примеров приближенных методов, удовлетворяющих условиям этой теоремы, приведем два конечно-разностных метода: схему Лакса (в одномерном случае для уравнения с выпуклой функцией Φ схема Лакса изучалась в работах (⁴, ⁵)) и модифицированную схему распада разрывов. В этих методах u_τ кусочно-постоянна: $u_\tau(t, x) = u_m^i$ в Π_m^i : $i\tau \leq t < (i+1)\tau$, $(m_s-1)h_s \leq x < (m_s+1)h_s$, $i=0, 1, 2, \dots$; $m = (m_1, \dots, m_n)$, m_s — целые числа той же четности, что i ; $\tau h_s^{-1} = \sigma_s$. Оператор P_τ определяется соотношением

$$P_\tau u(x) = \frac{1}{h_1 h_2 \dots h_n} \int_{\Pi_m^0} u(y) dy, \quad x \in \Pi_m^0,$$

и, очевидно, удовлетворяет сформулированным выше условиям. В схеме Лакса u_m^i определяются уравнениями

$$u_m^{i+1} = 2^{-n} \sum_{j \in I} \left\{ u_{m+j}^i - \sum_{s=1} \sigma_s j_s \Phi_s(u_{m+j}^i) \right\},$$

а в модифицированной схеме распада разрывов — уравнениями

$$u_m^{i+1} = 2^{-n} \sum_{j \in I} \left\{ u_{m+j}^i - \sum_s \sigma_s j_s \Phi_s(u_{m+j}^i) + \sum_s \sum_{k>s} \sigma_s \sigma_k j_s j_k \Phi_{s_k}(u_{m+j}^i) \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^n \sigma_1 \dots \sigma_n j_1 \dots j_n \Phi_{12\dots n}(u_{m+j}^i) \right\}, \quad (9)$$

где $\Phi_{s_1 s_2 \dots s_k}(u) = \int \Phi_{s_1}'(u) \Phi_{s_2}'(u) \dots \Phi_{s_k}'(u) du$, I — множество всех мультииндексов $j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ с $j_s = \pm 1$. Схема Лакса устойчива и удовлетворяет условию (7) при

$$\sum_{s=1}^n \sigma_s \max_u |\Phi_s'(u)| \leq 1,$$

а схема (9) — при $\sigma_s \max_u |\Phi_s'(u)| \leq 1$. Для выполнения условия (8) существенна ограниченность сверху отношений $h_s \tau^{-1}$.

Подробные доказательства приведенных результатов будут опубликованы в «Журнале вычислительной математики и математической физики».

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
1 IX 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Н. Кружков, ДАН, т. 187, № 1, 29 (1969). ² С. Н. Кружков, Матем. заметки, т. 6, № 1, 97 (1969). ³ Н. Н. Кузнецов, Журн. вычислит. матем. и матем. физики, т. 13, № 1, 92 (1973). ⁴ Н. С. Бахвалов, Там же, т. 1, № 5, 771 (1961). ⁵ Р. В. Разумейко, Матем. заметки, т. 13, № 2, 207 (1973).