

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

К ВОПРОСУ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНОЙ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ

В работе ⁽¹⁾ получено представление аналитических функций рядами Дирихле в конечной выпуклой области. В работах ⁽²⁾ и ⁽³⁾ получено представление аналитических функций рядами Дирихле соответственно во всей плоскости и полуплоскости. Здесь речь пойдет о представлении аналитических функций рядами Дирихле в произвольной бесконечной выпуклой области, отличной от всей плоскости.

1. Конструкция ряда. Пусть D — бесконечная выпуклая область, отличная от всей плоскости. Будем считать, что $0 \in D$, луч $(-\infty, 0]$ принадлежит D и если $l_\varphi: x \cos \varphi + y \sin \varphi - K(\varphi) = 0$ — опорная прямая области D , то φ меняется в пределах $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$ ($0 < \varphi_0 \leq \pi/2$). Угол φ может равняться и φ_0 , если граница ∂D , начиная с некоторого места, идет по прямой l_φ ; в аналогичной ситуации может быть $\varphi = -\varphi_0$. В случае, если D — полуплоскость, $\varphi = \varphi_0 = 0$. Положим $h(\varphi) = K(-\varphi)$ для допустимых значений φ . Пусть $L(\lambda)$ — целая функция, удовлетворяющая условию

$$|L(re^{i\varphi})| < \frac{C}{1+r^\alpha} e^{h(\varphi)r}, \quad \alpha > 1, \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 \quad (1)$$

(в случаях, указанных выше, φ может равняться φ_0 или $-\varphi_0$). Допустим, что λ_k , $k \geq 1$, — ее нули и допустим, что все они простые. Положим

$$\psi_k(t) = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \int_0^{\infty e^{i\varphi}} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} e^{-\lambda t} d\lambda, \quad k \geq 1, \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0.$$

В силу (1), функция $\psi_k(t)$ регулярна вне $\bar{D}$, непрерывна вплоть до границы (кроме, быть может, бесконечно удаленной точки) и ограничена по модулю (константой, зависящей вообще от номера k).

Возьмем функцию $F(z)$, аналитическую в области D , непрерывную вплоть до границы, причем

$$F(z) = O(1/|z|^\mu), \quad \mu > 1, \quad z \in \bar{D}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Сопоставим ей ряд

$$F(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k z}, \quad A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} F(t) \psi_k(t) dt. \quad (3)$$

Речь идет о сходимости этого ряда к $F(z)$. Найдём формулу для разности между $F(z)$ и частной суммой ряда. Пусть Γ — конечный замкнутый контур, на котором $L(\lambda) \neq 0$, и D_Γ — область, ограниченная Γ . Рассмотрим функцию

$$\Phi(z, \lambda, \Gamma) = L(\lambda) \sum_{\lambda_k \in D_\Gamma} \frac{e^{\lambda_k z}}{(\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)} - e^{\lambda z}, \quad z \in D;$$

это целая функция относительно λ . Положим

$$\gamma(z, t, \Gamma) = \int_0^{\infty e^{i\varphi}} \Phi(z, \lambda, \Gamma) e^{-\lambda t} d\lambda, \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0. \quad (4)$$

Имеем

$$\gamma(z, t, \Gamma) = \sum_{\lambda_k \in D\Gamma} e^{\lambda_k z} \psi_k(t) - \frac{1}{t-z}, \quad z \in D, \quad t \notin D.$$

Эта функция как функция переменного t регулярна вне $\bar{D}$, непрерывна вне D и ограничена. Отсюда, в силу (2), получаем

$$F(z) - \sum_{\lambda_k \in D\Gamma} A_k e^{\lambda_k z} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \gamma(z, t, \Gamma) F(t) dt. \quad (5)$$

2. Теорема о разложении. Пусть целая функция $L(\lambda)$ удовлетворяет дополнительно следующему условию: имеется система замкнутых контуров Γ_k , $k \geq 1$, и система содержащих эти контуры криволинейных колец

$$\mathcal{P}_k = \bigcup_{t \in \Gamma_k} \{z: |z-t| \leq e^{-\varepsilon_k r_k}\}, \quad r_k = \min_{t \in \Gamma_k} |t| \rightarrow \infty, \quad 0 < \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

со свойствами:

а) каковы ни были $\gamma > 0$ и $\varepsilon > 0$, имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{\lambda \in \Gamma'_k} H(\lambda) = +\infty, \quad H(\lambda) = \frac{\ln |L(\lambda)|}{|\lambda|},$$

функция $H(\lambda)$ при $k > K(\gamma, \varepsilon)$ больше $h(\varphi) - \varepsilon$ на P'_k , больше $h(\varphi_0 - \gamma) - \varepsilon$ на $\mathcal{P}''_k$, больше $h(-\varphi_0 + \gamma) - \varepsilon$ на P'''_k , где Γ'_k — часть Γ_k , лежащая в дополнении к углу $|\varphi| < \varphi_0 + \gamma$, $\mathcal{P}'_k$ — часть $\mathcal{P}_k$, лежащая в углу $|\varphi| < \varphi_0 - \gamma$. $\mathcal{P}''_k$ и $\mathcal{P}'''_k$ — части $\mathcal{P}_k$, лежащие соответственно в малых углах $|\varphi - \varphi_0| \leq \gamma$. $|\varphi + \varphi_0| \leq \gamma$;

б) если C'_k и C''_k — части, на которые Γ_k разбивает границу криволинейного полукольца $\mathcal{P}'_k \cup \mathcal{P}''_k \cup \mathcal{P}'''_k$ (при этом пусть C''_k лежит внутри Γ_k), то длины кривых Γ'_k , C'_k и C''_k при $k \rightarrow \infty$ суть $\exp[o(1)r_k]$.

При указанных условиях имеет место

Теорема 1. На компакте $\bar{E} \subset D$

$$\left| F(z) - \sum_{\lambda_v \in D\Gamma_k} A_k e^{\lambda_v z} \right| < e^{-\delta_0 r_k}, \quad \delta_0 = \delta_0(\bar{E}) > 0, \quad k > k_0.$$

Для доказательства воспользуемся формулой (5), в которой в качестве Γ возьмем контур Γ_k . Имея в виду представление (4), оценим $\Phi(z, \lambda, \Gamma_k)$ в угле $|\arg \lambda| < \varphi_0$. Пусть z принадлежит выпуклому компактному $\bar{E} \subset D$, δ — расстояние от $\bar{E}$ до ∂D , $K_0(\varphi)$ — опорная функция $\bar{E}$. При $\mu = |\mu| e^{i\varphi}$ имеем $\operatorname{Re}(z\mu) = \operatorname{Re}(ze^{i\varphi})|\mu| \leq K_0(\varphi)|\mu|$ для любых φ , причем

$$K_0(\varphi) \leq h(\varphi) - \delta, \quad |\varphi| < \varphi_0. \quad (6)$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. По нему, в силу непрерывности $K_0(\varphi)$, найдется $\gamma > 0$ такое, что если $|\varphi_2 - \varphi_1| < 2\gamma$, то $|K_0(\varphi_2) - K_0(\varphi_1)| < \varepsilon$. Отсюда $K_0(\varphi) < K_0(\varphi_0 - \gamma) + \varepsilon$ при $|\varphi - \varphi_0| < \gamma$ и $K_0(\varphi) < K_0(-\varphi_0 + \gamma) + \varepsilon$ при $|\varphi + \varphi_0| < \gamma$. В силу (6), $K_0(\varphi_0 - \gamma) \leq h(\varphi_0 - \gamma) - \delta$, $K_0(-\varphi_0 + \gamma) \leq h(\varphi_0 - \gamma) - \delta$. Поэтому

$$\operatorname{Re}(z\mu) < \begin{cases} [h(\varphi_0 - \gamma) - \delta + \varepsilon]|\mu|, & |\varphi - \varphi_0| < \gamma, \\ [h(-\varphi_0 + \gamma) - \delta + \varepsilon]|\mu|, & |\varphi + \varphi_0| < \gamma. \end{cases} \quad (7)$$

Заметим, что при любых μ и $z \in \bar{E}$

$$\operatorname{Re}(z\mu) < Q|\mu|, \quad Q = Q(\bar{E}). \quad (8)$$

Пусть D'_k — пересечение D_{Γ_k} с углом $|\arg \mu| < \varphi_0$, D''_k — дополнение D'_k до этого угла. Имеем

$$\Phi(z, \lambda, \Gamma_k) = \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{\Gamma'_k \cup C'_k} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu)L(\mu)}, \quad \lambda \in D'_k,$$

$$\Phi(z, \lambda, \Gamma_k) = \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{\Gamma_k' \cup C_k''} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu)L(\mu)} - e^{\lambda z}, \quad \lambda \in D_k''.$$

В знаменателе $|\lambda - \mu| \geq \exp(-\varepsilon_k r_k)$.

В силу (8) и первого из условий а)

$$A(\mu) = \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| < e^{-|\mu|}, \quad \mu \in \Gamma_k', \quad k > k_1.$$

В силу (6) и второго из условий а) имеем $A(\mu) < \exp[-(\delta - \varepsilon)|\mu|]$ для $\mu \in [C_k' \cup C_k''] \cap \mathcal{P}_k'$, $k \geq k_2$. В силу (7) и остальных из условий а) получаем $A(\mu) < \exp[-(\delta - 2\varepsilon)|\mu|]$ для $\mu \in [C_k' \cup C_k''] \cap [\mathcal{P}_k'' \cup \mathcal{P}_k''']$, $k > k_3$. Во всех случаях $A(\mu) < \exp[-(\delta - 2\varepsilon)|\mu|]$ для $\mu \in \Gamma_k' \cup C_k' \cup C_k''$, когда k велико. Следовательно, каждый из интегралов, учитывая условие б), имеет оценку

$$\left| \int \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu)L(\mu)} \right| < e^{-(\delta - 3\varepsilon)r_k}, \quad k > k_0(\varepsilon).$$

Осталось оценить $|e^{\lambda z}|$ для $\lambda = re^{i\varphi} \in D_k''$. В силу (6), $|e^{\lambda z}| \leq \exp\{[h(\varphi) - \delta]r\}$, $|\varphi| < \varphi_0$, откуда

$$|e^{\lambda z}| \leq \frac{e^{h(\varphi)r}}{1 + r^\alpha} (1 + r^\alpha) e^{-\delta r} \leq e^{-(\delta - \varepsilon)r_k} \frac{e^{h(\varphi)r}}{1 + r^\alpha}, \quad \lambda \in D_k'', \quad k > k_4.$$

На основании полученных оценок, учитывая (1), окончательно получаем

$$|\Phi(z, \lambda, \Gamma)| < e^{-(\delta - 4\varepsilon)r_k} \frac{e^{h(\varphi)r}}{1 + r^\alpha}, \quad |\varphi| < \varphi_0, \quad z \in \bar{E}, \quad k > k_0(\varepsilon, \delta).$$

Из этой оценки вытекает, что функции $\gamma(z, t, \Gamma_k)$ как функции t аналитичны вне $\bar{D}$, непрерывны до границы и

$$|\gamma(z, t, \Gamma_k)| < C e^{-(\delta - 4\varepsilon)r_k}, \quad z \in \bar{E}, \quad k \geq 1, \quad t \notin D.$$

Отсюда, на основании (5) и условия (2), получаем заключение теоремы.

К случаю (2) общий случай сводится на основании следующей теоремы (ее доказательство будет дано в другой статье).

Теорема 2. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в бесконечной выпуклой области D . Имеется функция $F(z)$, аналитическая в D , непрерывная в $\bar{D}$, удовлетворяющая условию (2), целая функция $\Phi(z)$ и целая функция $M(\lambda) = \sum_0^\infty c_k \lambda^k$ с ростом не выше первого порядка нулевого типа такие, что

$$f(z) = M(D)F(z) + \Phi(z), \quad M(D)F(z) = \sum_0^\infty c_k F^k(z).$$

Согласно теореме 1

$$f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_v \in D \cap \Gamma_k} A_v M(\lambda_v) e^{\lambda_v z} + \Phi(z), \quad z \in D.$$

Заметим, что функцию $\Phi(z)$ во всей плоскости можно разложить в ряд Дирихле. Если между Γ_k и Γ_{k+1} , $k \geq 1$, лежит только один нуль $L(\lambda)$, то мы получим разложение $f(z)$ в ряд Дирихле в области D . В ряде случаев удастся построить функции $L(\lambda)$ с нужными свойствами. В случае произвольной области D вопрос о существовании соответствующей функции $L(\lambda)$ остается открытым.

Отдел физики и математики
Башкирского филиала Академии наук СССР
Уфа

Поступило
30 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Ф. Леонтьев, Матем. сб., т. 81 (123), № 4 (1970). ² А. Ф. Леонтьев, УМН, т. 24, в. 2 (1969). ³ А. Ф. Леонтьев, Матем. сб., т. 85 (127), № 4 (1971).