

В. В. КРИВОВ

О СТРУКТУРЕ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С МИНИМАЛЬНОЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ДИЛАТАЦИЕЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 7 VII 1975)

В этой заметке вводится обобщение понятия модуля семейства кривых ⁽¹⁾, которое затем применяется для изучения структуры диффеоморфизмов с минимальной промежуточной дилатацией ⁽²⁾. Работа существенно обобщает результаты, изложенные в заметке автора ⁽³⁾.

1. Пусть M — ориентируемое n -мерное риманово многообразие, ω — дифференциальная форма порядка $l \leq n$ на M . Мы будем рассматривать только непрерывно дифференцируемые формы.

Совокупность F дифференциальных форм порядка l назовем допустимой, если для любой $\omega \in F$ и любой точной формы φ порядка l с компактным носителем в M форма $\omega + \varphi \in F$.

Если T_x — касательное пространство к M в точке $x \in M$, то соответствующее этой точке значение ω_x есть элемент пространства $\Lambda_n^l(T_x)$, состоящего из всех антисимметрических тензоров порядка l . Выбирая в T_x ортонормированный базис $(e_1, \dots, e_n)$, обозначим $(dx_1, \dots, dx_n)$ дуальный базис пространства, сопряженного к T_x . Тогда

$$\omega_x = \sum_{i_1, \dots, i_l} \omega_{i_1 \dots i_l} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l}, \quad (1)$$

где суммирование производится по всем наборам различных индексов таких, что $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n$. Положим $|\omega_x| = \left(\sum_{i_1, \dots, i_l} \omega_{i_1 \dots i_l}^2 \right)^{1/2}$. Значение $|\omega_x|$ не зависит от выбора ортонормированного базиса в T_x .

Дифференциальную форму, задающую элемент объема на M , обозначим σ . Согласно (1), $\sigma_x = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Форму σ будем обозначать также dx . Положим $\|\omega\| = \left(\int_M |\omega_x|^{n/l} dx \right)^{1/n}$. Величина

$$\mu(F; M) = \inf_{\omega \in F} \|\omega\| \quad (2)$$

называется обобщенным модулем многообразия M по совокупности F . Если для некоторой $\omega_0 \in F$ $\mu(F; M) = \|\omega_0\|$, то форма ω_0 называется экстремальной.

Записывая ω в виде (1), введем форму ω^* порядка $m = n - l$, полагая $\omega^* = \sum_{i_1, \dots, i_l} \omega_{i_1 \dots i_l} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_m}$, где в каждом слагаемом индексы $j_1, \dots, j_m$ — это все те числа из набора $(1, \dots, n)$, которых нет среди $i_1, \dots, i_l$, упорядоченные так, что перестановка $(i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_m)$ четная.

Теорема 1. Экстремальная форма ω_0 удовлетворяет уравнению

$$d(|\omega_0|^{n/l-2} \omega_0^*) = 0. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть ψ — произвольная дифференциальная форма порядка $l-1$, носитель которой содержится в достаточно малом открытом шаре $B \subset M$, и пусть $\varphi = d\psi$. Функция $g(t) = \int_M |\omega_0 + t\varphi|^{n/l} dx$ дости-

гает минимума при $t=0$. Поэтому

$$g'(0) = \left(\frac{d}{dt} \int_M |\omega_0 + t\varphi|^{n/l} dx \right)_{t=0} =$$

$$(4)$$

$$= \frac{n}{2l} \left[\int_M (|\omega_0 + t\varphi|^2)^{n/2l-1} \frac{d}{dt} (|\omega_0 + t\varphi|^2 dx) \right]_{t=0} = \frac{n}{l} \int_M |\omega_0|^{n/l-2} \varphi \wedge \omega_0^* = 0.$$

Обозначая для краткости $\omega_1 = |\omega_0|^{n/l-2} \omega_0$, проинтегрируем по B равенство $d(\omega_1 \wedge \psi) = d\omega_1 \wedge \psi + (-1)^m \omega_1 \wedge d\psi$. Применяя формулу Стокса, получим

$$0 = \int_{\partial B} \omega_1 \wedge \psi = \int_B d(\omega_1 \wedge \psi) = \int_B d\omega_1 \wedge \psi + (-1)^m \int_B \omega_1 \wedge d\psi.$$

Как видно из (4), второе слагаемое здесь равно нулю. Значит, равно нулю и первое слагаемое, откуда в силу произвольности ψ и вытекает (3).

Пример. M — кольцевая область в R^n , C_0 и C_1 — две связанные компоненты дополнения $R^n \setminus M$, совокупность F состоит из всех точных дифференциальных форм ω первого порядка на M таких, что $\int_\gamma \omega = 1$ для любого пути γ , соединяющего C_0 и C_1 в M . Тогда $[\mu(F, M)]^n$ есть модуль семейства всех таких путей или конформная емкость области M по Левнеру (4), ω можно задать в виде векторного поля ∇u , где функция u непрерывна в R^n , $u|_{C_0} = 0$, $u|_{C_1} = 1$, интеграл в (2) представляет собой интеграл Дирихле, а уравнение (3) для экстремальной функции примет вид $\operatorname{div}(|\nabla u|^{n-2} \nabla u) = 0$.

2. Пусть теперь $f: M \rightarrow N$ дифференцируемое отображение многообразия M в другое риманово многообразие N , размерность которого v . Для любой точки $x \in M$ оно порождает линейное отображение $f': T_x \rightarrow T_{f(x)}$, где $T_{f(x)}$ — касательное пространство к N в точке $f(x)$. Это линейное отображение индуцирует линейное отображение $f^*: \Lambda_v^l(T_{f(x)}) \rightarrow \Lambda_n^l(T_x)$, сопоставляющее форме ω порядка l на N форму $f^*\omega$ порядка l на M . Введем норму f^* по формуле $|f^*| = \sup_{|\omega| \neq 0} |f^*\omega|/|\omega|$. Например, если размерности M и N совпадают и равны n , а $f'(x)$ имеет в надлежащем образом выбранных ортонормированных базисах вид $dy_i = \lambda_i dx_i$, $i=1, 2, \dots, n$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, то, как нетрудно проверить, $|f^*| = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_l$. Заметим также, что $|f^*\omega| \leq |f^*| \cdot |\omega|$.

Обозначим f^*F совокупность всех дифференциальных форм в M , полученных из форм совокупности F в N с помощью f^* .

Пусть теперь $f: M \rightarrow N$ диффеоморфизм. Величина

$$K_l(f) = \operatorname{vrai} \max_{x \in M} \frac{(\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n)^{l/n}}{\lambda_{n-l+1} \cdot \dots \cdot \lambda_n} \quad (5)$$

называется l -й дилатацией диффеоморфизма f .

Теорема 2. Для любого диффеоморфизма $f: M \rightarrow f(M)$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{K_l(f)} \mu(F; f(M)) \leq \mu(f^*F; M) \leq K_{n-l}(f) \mu(F; f(M)). \quad (6)$$

Доказательство. Так как для почти всех $x \in M$ имеем неравенство $|f^*|/(\det f')^{l/n} \leq K_{n-l}(f)$, то для любой $\omega \in F$

$$\left(\int_{f(M)} |\omega|^{n/l} dy \right)^{l/n} \geq \left(\int_M \frac{|f^*\omega|^{n/l}}{|f^*|^{n/l}} |\det f'| dx \right)^{l/n} \geq$$

$$\geq \frac{1}{K_{n-l}(f)} \|f^*\omega\| \geq \frac{1}{K_{n-l}(f)} \mu(f^*F; M). \quad (7)$$

Отсюда вытекает правое из неравенств (6). Левое неравенство получается при рассмотрении обратного диффеоморфизма.

Следствие. *Обобщенный модуль является конформным инвариантом.*

Переходим к выяснению структуры диффеоморфизма, для которого одно из неравенств в (6) обращается в равенство. Такой диффеоморфизм будем называть экстремальным. Ограничимся случаем обращения в равенство правого из неравенств (6).

Теорема 3. *Диффеоморфизм f , обладающий свойствами:*

1) $|f^*|/(\det f')^{1/n} = K_{n-1}(f) = \text{const}$ в M ;

2) *если ω_0 — экстремальная форма в $f(M)$, то $f^*\omega_0$ — экстремальная форма в M ;*

3) $|f^*\omega| = |f^*| \cdot |\omega|$ для всех $x \in M$ будет экстремальным.

*Обратно, если $\mu(F; f(M))$ и $\mu(f^*F; M)$ отличны от 0 и $+\infty$, ω_0 — экстремальная форма в $f(M)$, $|f^*\omega| \neq 0$ для всех $x \in M$ и диффеоморфизм f экстремальный, то выполняются условия 1, 2, 3.*

Доказательство получается рассмотрением случая равенства в цепочке неравенств (7).

3. В качестве примера возьмем декартово произведение $N = N_1 \times N_2$ двух римановых многообразий размерности l и m соответственно, введя в нем метрику по формуле $ds^2 = (ds_1^2 + ds_2^2)^{1/2}$, где ds_i — метрика в N_i , $i=1, 2$. Предположим, что N_1 и N_2 ориентируемые, связны, имеют конечный объем $v_i = \int_{N_i} \sigma_i$, где σ_i — элемент объема N_i . Пусть еще N_1 имеет гладкий край ∂N_1 .

Рассмотрим совокупность замкнутых в N дифференциальных форм порядка l , непрерывных на $(N_1 \cup \partial N_1) \times N_2$ и удовлетворяющих условиям:

1) $\int_{N_1 \times y_2} \omega \geq 1$ для некоторой точки $y_2 \in N_2$ при фиксированной ориентации $N_1 \times y_2$;

2) $\omega(T_y(\partial N_1 \times N_2)) = 0$ для всех $y \in \partial N_1 \times N_2$.

Пусть $\tilde{y}_2 \in N_2$ и γ — гладкий путь, соединяющий y_2 и $\tilde{y}_2$ в N_2 . Тогда $N_1 \times \gamma$ есть сингулярная $(l+1)$ -мерная цепь в $N_1 \times N_2$. Пользуясь формулой Стокса при соответствующем выборе ориентации в $N_1 \times \tilde{y}_2$, получим, учитывая условие 2),

$$0 = \int_{N_1 \times \gamma} d\omega = \int_{\partial(N_1 \times \gamma)} \omega = \int_{\partial N_1 \times \gamma} \omega + \int_{N_1 \times \tilde{y}_2} \omega - \int_{N_1 \times y_2} \omega = \int_{N_1 \times \tilde{y}_2} \omega - \int_{N_1 \times y_2} \omega.$$

Обозначим введенную совокупность форм $F(N_1)$ и вычислим $\mu(F(N_1); N_1 \times N_2)$. Применяя теорему Фубини и неравенство Гёльдера, получим оценку

$$\mu(F(N_1); N_1 \times N_2) \geq [v_2^l / v_1^m]^{1/(l+m)}. \quad (8)$$

Пусть теперь $p: N_1 \times N_2 \rightarrow N_1$ — проекция, т. е. отображение, определенное равенством $p(y_1, y_2) = y_1$, где $y_1 \in N_1$, $y_2 \in N_2$. Положим $\omega_0 = (1/v_1)p^*(\sigma_1)$. Дифференциальная форма σ_1 имеет порядок l и определена на l -мерном многообразии N_1 . Поэтому $d\omega_0 = (1/v_1)p^*(d\sigma_1) = 0$, так что форма ω_0 замкнута в N . Нетрудно проверить, что для ω_0 выполнены условия 1) и 2). Учитывая, что $|\sigma_1| = 1$ для всех $y_1 \in N_1$, можно вывести, что форма ω_0 — экстремальная для $\mu(F(N_1); N_1 \times N_2)$, так что на самом деле в (8) имеет место равенство. Итак,

$$\mu(F(N_1); N_1 \times N_2) = [v_2^l / v_1^m]^{1/(l+m)}. \quad (9)$$

Пусть M_1 и M_2 — другие два римановых многообразия размерности l и m соответственно, причем M_1 имеет гладкий край ∂M_1 , и $M = M_1 \times M_2$. Обозначим $\mathfrak{M}$ совокупность диффеоморфизмов $(M_1 \cup \partial M_1) \times M_2$ на $(N_1 \cup \partial N_1) \times N_2$, обладающих свойствами:

1) существуют $x_2 \in M_2$, $y_2 \in N_2$ и гладкое многообразие S размерности $l+1$ в $N_1 \times N_2$ такие, что

$$\partial S = f(M_1 \times x_2) - N_1 \times y_2 + \Sigma, \quad (10)$$

где $\Sigma \subset \partial N_1 \times N_2$;

2) если $f \in \mathfrak{M}$, то $f(\partial M_1 \times M_2) = \partial N_1 \times N_2$.

В частности, если $\partial N_1 = \emptyset$, свойство 1) означает, что $f(M_1 \times x_2)$ и $N_1 \times y_2$ гомологичны в $N_1 \times N_2$.

В $M_1 \times M_2$ введем класс $F(M_1)$ дифференциальных форм таким же образом, как это было сделано в $N_1 \times N_2$. Если $\tilde{v}_i$ — объем M_i , $i=1, 2$, и v_i конечны, то, согласно (9),

$$\mu(F(M_1); M_1 \times M_2) = [\tilde{v}_2^l / \tilde{v}_1^m]^{1/(l+m)}. \quad (11)$$

Заметим, что для $f \in \mathfrak{M}$ имеет место включение $f^*F(N_1) \subset F(M_1)$. Действительно, для любой $\omega \in F(N_1)$ выберем x_2 и y_2 , так чтобы имело место (10). Применяя формулу Стокса и учитывая, что $\int_{\Sigma} \omega = 0$, получим $\int_{M_1 \times x_2} f^* \omega = \int_{f(M_1 \times x_2)} \omega = \int_{N_1 \times y_2} \omega \geq 1$. Если еще принять во внимание 2-е свойство отображения f и 2-е условие для $f^* \omega$, то получим, что $f^* \omega \in F(N_1)$, т. е. что упомянутое включение справедливо. Поэтому

$$\mu(f^*F(N_1); M_1 \times M_2) \geq \mu(F(M_1); M_1 \times M_2) = [\tilde{v}_2^l / \tilde{v}_1^m]^{1/(l+m)}.$$

Вместе с (6) и (9) это дает

$$K_{n-l}(f) \geq [(v_1/\tilde{v}_1)^m; (v_2/\tilde{v}_2)^l]^{1/(l+m)}. \quad (12)$$

Итак, справедлива

Теорема 4. Для любого диффеоморфизма $f \in \mathfrak{M}$ имеет место неравенство (12).

Рассмотрим простейший случай реализации равенства в (12). Пусть существуют диффеоморфизмы $g_1: M_1 \cup \partial M_1 \rightarrow N_1 \cup \partial N_1$ и $g_2: M_2 \rightarrow N_2$ с постоянными якобианами J_1 и J_2 соответственно. Тогда $J_1 = v_1/\tilde{v}_1$, $J_2 = v_2/\tilde{v}_2$. Обозначим $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ растяжения для g_1 , а $\lambda_{l+1}, \lambda_{l+2}, \dots, \lambda_{l+m}$ — растяжения для g_2 . Диффеоморфизм, задаваемый формулой

$$g(x_1; x_2) = (g(x_1); g(x_2)), \quad (13)$$

будет экстремальным в классе $\mathfrak{M}$, если растяжения $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ в любой точке $x_1 \in M_1$ не меньше растяжений $\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_{l+m}$ в любой точке $x_2 \in M_2$. В самом деле

$$K_{n-l}(g) = \operatorname{vrai} \max_{x \in M} \frac{(\lambda_1 \dots \lambda_{l+m})^{m/(l+m)}}{\lambda_{l+1} \dots \lambda_{l+m}} = \left[\frac{J_1^m}{J_2^l} \right]^{1/(l+m)}.$$

Следовательно, для диффеоморфизма (13) в (12) реализуются равенства.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. В. Шабат, ДАН, т. 130, № 6 (1960). ² В. В. Кривов, ДАН, т. 215, № 4 (1974).
³ В. В. Кривов, ДАН, т. 155, № 1 (1964). ⁴ С. Loewner, J. Math. Mech., v. 8 (1959).