

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

С. Ж. АЗАМатов, В. А. Андреев

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ТИПА УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СО СДВИНУТЫМ АРГУМЕНТОМ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 25 VIII 1975)

Уравнения в частных производных со сдвинутым аргументом возникают, например, в ряде задач интегральной геометрии ⁽¹⁾. Их существенной особенностью является возможное отсутствие корректности по Адамару в тех случаях, когда задача для аналогичного уравнения без сдвиговых членов поставлена корректно ^(1, 2). В настоящей работе исследуется единственность задачи Коши для уравнения теплопроводности и волнового уравнения, содержащих дополнительные члены со сдвигом аргумента на некоторую величину, являющуюся параметром уравнения.

Рассмотрим в области $\mathcal{D}: \{0 \leq t \leq T < \infty, |x| < \infty, |y| < \infty\}$ уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{b}{2} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (0, x+y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (0, y-x, t) \right\} \quad (1)$$

и для него условие Коши

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad (2)$$

где $a = \text{const}$, y — параметр.

В работе ⁽²⁾ рассматривалась задача (1), (2), причем функция $b = b(x, t)$ не зависела от y , что позволяло при исследовании применить преобразование Фурье по параметру y . Здесь мы рассмотрим случай $b = b(y)$. Аналогично тому, что имело место в работах ^(1, 2), задача (1), (2) может оказаться корректной или некорректной в классическом смысле, причем корректность определяется соотношением коэффициентов a^2 и $b(y)$.

Исследуем ситуацию, когда задача некорректна. Ниже мы доказываем единственность именно в этом случае. Предположим, что решение задачи (1), (2) существует и суммируемо с квадратом по параметру y . Обозначим $f(y, t) = \partial^2 u / \partial x^2|_{x=0}$. Решение задачи при условии, что функция $f(y, t)$ известна, записывается в виде ⁽³⁾

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x - \xi, t) \varphi(\xi, y) d\xi + \\ + \frac{b(y)}{2} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x - \xi, t - \tau) [f(\xi + y, \tau) + f(y - \xi, \tau)] d\xi, \quad (3)$$

где функция $\theta(x, t)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Продифференцируем выражение (3) два раза по переменной x и, подставив $x = 0$, получим следующее уравнение для функции $f(y, t)$:

$$f(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}(\xi, t) \varphi(\xi, y) d\xi + b(y) \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}(\xi - y, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi, \quad (4)$$

где производные фундаментального решения понимаются в смысле теории обобщенных функций. Очевидно, что единственность решения задачи (1), (2) следует из единственности решения полученного уравнения. Трудность его исследования традиционными методами связана с появлением неинтегрируемой особенности $(t-\tau)^{-1/2}$ в мажоранте ядра. Поэтому используем специальный прием, который редуцирует нашу задачу к некоторой задаче для уравнения «обратной теплопроводности» и позволяет доказать теорему единственности.

Теорема. Пусть решение задачи (1), (2) существует и так же, как функции $\varphi(x, y)$, $b(y)$, суммируемо с квадратом по переменной y ; кроме того, $\varphi(x, y)$ и $b(y)$ дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам и $b(y) \neq 0$.

Тогда решение задачи (1), (2) единственно.

Наметим путь доказательства. Обозначим

$$\Phi(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}(\xi, t) \varphi(\xi, y) d\xi.$$

Продифференцировав уравнение (4) два раза по y и один раз по переменной t , нетрудно получить уравнение для функции $v = f - \Phi$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = [a^2 + b(y)] \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A(y) \frac{\partial v}{\partial y} + B(y)v + b(y) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad (5)$$

которое дополняется очевидным условием $v|_{t=0} = 0$. Здесь

$$A(y) = -\frac{2a^2}{b} \cdot \frac{db}{dy}, \quad B(y) = \frac{1}{2} \left(\frac{dA}{dy} + \frac{A^2}{a^2} \right).$$

Уравнение (5) является обычным уравнением теплопроводности, если $a^2 + b(y) > 0$ на всей оси y , и уравнением «обратной теплопроводности», если имеет место противоположное неравенство: $a^2 + b(y) < 0$. Мы рассмотрим именно последний случай, опуская классическую и смешанную ситуации. Обычным приемом нетрудно привести уравнение (5) к виду

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c(z)w + F(z, t), \quad (6)$$

где

$$z = \int_{y_0}^y [-a^2 - b(\tau)]^{-1/2} d\tau, \quad w = k(z)v(y(z), t),$$

а функции $k(z)$, $c(z)$, $F(z, t)$ определяются через коэффициенты и правую часть уравнения (5). Уравнение (6) дополняется условием $w|_{t=0} = 0$.

При рассмотрении единственности уравнение (6) будет однородным. Введем функцию

$$\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w^2(z, t) dz,$$

для которой справедливо неравенство

$$\alpha(t) \leq [\alpha(0)]^{(T-t)/T} \cdot [\alpha(T)]^{t/T}. \quad (7)$$

Оно следует из логарифмической выпуклости функции $\alpha(t)$, которая называется, например, так, как в работе (4), где, в отличие от нашего случая, $c(z)$ в уравнении (6) тождественно равно нулю. В основе доказательства

лежит тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right]^2 dz,$$

которое в случае $c(z) \neq 0$ следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz &= - \int_{-\infty}^{\infty} w \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + cw \right] dz - \int_{-\infty}^{\infty} cw \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} c^2 w^2 dz = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]^2 - 2cw \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c^2 w^2 \right\} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right]^2 dz. \end{aligned}$$

Из неравенства (7) следует единственность в L_2 по переменной z решения уравнения (6), а значит, и решения $f(y, t)$ уравнения (4) в L_2 по переменной y .

Совершенно аналогично может быть рассмотрено волновое уравнение с дополнительными сдвиговыми членами:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{b(y)}{2} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (0, x+y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (0, y-x, t) \right\}. \quad (8)$$

Уравнение рассматривается в области $\mathcal{D}$, определенной выше.

Поставим задачу Коши

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \partial u / \partial t|_{t=0} = 0.$$

При тех же допущениях, что и в параболическом случае, решение может быть в виде ⁽³⁾:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= 1/2 [\varphi(x+at, y) + \varphi(x-at, y)] + \\ &+ \frac{b(y)}{4a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} [f(\xi+y, \tau) + f(y-\xi, \tau)] d\xi. \end{aligned}$$

Здесь для функции $f(y, t)$ получается интегро-дифференциальное соотношение

$$\begin{aligned} f(y, t) &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (at, y) + \frac{b(y)}{2} \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial y} (y+a(t-\tau), \tau) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial y} (y-a(t-\tau), \tau) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Обозначим $\Phi(y, t) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (at, y)$, тогда для функции $v = f - \Phi$ получится

уравнение вида (5), где слева будет $\partial^2 v / \partial t^2$. Опять ограничимся случаем $a^2 + b(y) < 0$ и получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c(z)w + F(z, t), \quad w|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

Единственность решения в L_2 следует из оценок, полученных для задачи аналитического продолжения ⁽⁴⁾, которые обобщаются так же, как и в параболическом случае.

Замечание. В качестве простейшего обобщения можно ввести в уравнения (1), (8) члены вида

$$\dots + b(x+y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, x+y, t) + b(y-x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, y-x, t).$$

Пользуемся возможностью искренне поблагодарить чл.-корр. АН СССР М. М. Лаврентьева и А. Л. Бухгейма за полезное обсуждение.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
12 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Ж. Азаматов, Сб.: Математические проблемы геофизики, в. 6, 1975, стр. 9.
² В. А. Андреев, С. Ж. Азаматов, там же, в. 5, 1974, стр. 5. ³ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 4, М., Гостехиздат, 1956. ⁴ М. М. Лаврентьев, Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1973.