

Академик АН УССР Г. Е. ПУХОВ, Г. К. ШАРАШИДЗЕ

ПРИНЦИП МОДЕЛИРОВАНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Исследования по теории автоматов, теории графов, теории дизъюнктивных нормальных форм, теории кодирования и по другим направлениям требуют решения комбинаторных задач дискретной математики, многие из которых в настоящее время считаются нерешенными.

Для решения комбинаторных задач предлагались специализированные вычислительные средства (¹, ²), но существование соответствующих физических аналогов не было известно. Вместе с тем физические модели, предложенные для ряда других задач (³⁻⁵), открыли путь к построению эффективных вычислительных средств и в значительной степени повлияли на разработку алгоритмов решения.

Ниже будет показано, что и для комбинаторных задач могут быть построены электронные физические аналоги.

Решение таких комбинаторных задач дискретной математики, как задача о гамильтоновых циклах, задача о минимальной раскраске вершин графа и ряда других (⁶) сводится к определению для некоторого ориентированного графа $G=(V, U)$ без петель и кратных ребер с множеством вершин $V=\{v\}$ и множеством ребер $U=\{u\}$ максимального подграфа $H=(V', U')$ с пустым множеством ребер $U'=\phi$ (⁷). Отсюда следует, что перечисленные задачи равносильны задаче определения множества максимальной мощности изолированных вершин $V' \subseteq V$, которая для графа с n вершинами $|V|=n$ может быть сформулирована следующим образом.

При условиях

$$\begin{aligned} x_i &= \begin{cases} 0, & \text{если } v_i \notin V', \quad i=1, \dots, n; \\ 1, & \text{если } v_i \in V', \end{cases} \\ a_{ii} &= 1, \quad i=1, \dots, n; \\ a_{ij} &= \begin{cases} 0, & \text{если } u_{ij} \notin U, \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если } u_{ij} \in U, \quad i, j=1, \dots, n; \end{cases} \\ x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq 1, \quad i=1, \dots, n, \end{aligned}$$

определяется

$$|V'|_{\max} = \max_{i=1}^n x_i.$$

Для рассматриваемой задачи предлагается физическая модель в виде дискретной электронной структуры с многими устойчивыми состояниями, состоящая из однородных элементов и матрицы связей между элементами. Элементы структуры моделируют вершины графа. В матрице между элементами i и j устанавливается связь, запрещающая состояние $x_j=1$ при состоянии $x_i=1$, если на графе имеется ребро $u_{ij} \in U$. Мощность, выделенная на элементе структуры при состоянии $x_i=1$, равна $P' > 0$, при состоянии $x_i=0$ она равна $P'' > 0$, причем $P'' > P'$. Мощность, выделенная на матрице связей, пренебрежимо мала. Суммарная мощность, выделенная в электронной структуре,

$$P = sP' + (n-s)P'' = nP'' - s(P'' - P'),$$

где n — количество элементов структуры,
 s — количество элементов в состоянии $x_i = 1$,

$$s = \sum_{i=1}^n x_i.$$

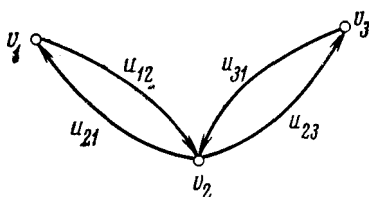


Рис. 1

Согласно закону наименьшей выделяемой мощности в электронных цепях структура автоматически устанавливается в состояние $P = \min$, а $s = \max$, что обеспечивает выполнение условий оптимальности получаемого решения задачи.

Рассмотрим пример. На рис. 1 приводится граф $G=(V, U)$, $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $U = \{u_{12}, u_{21}, u_{23}, u_{32}\}$. Для заданного графа имеем

$$x_1, x_2, x_3 = \begin{cases} 0, \\ 1; \end{cases}$$

$$a_{11}=1, \quad a_{12}=1, \quad a_{13}=0,$$

$$a_{21}=1, \quad a_{22}=1, \quad a_{23}=1,$$

$$a_{31}=0, \quad a_{32}=1, \quad a_{33}=1,$$

$$x_1^2 + x_1 x_2 \leq 1,$$

$$x_2 x_1 + x_2^2 + x_2 x_3 \leq 1,$$

$$x_3 x_2 + x_3^2 \leq 1,$$

$$|V'|_{\max} = \max(x_1 + x_2 + x_3).$$

Вариант схемы многоустойчивой электронной модели данной задачи приведен на рис. 2: 1, 2, 3 — элементы структуры, 4 — матрица связей.

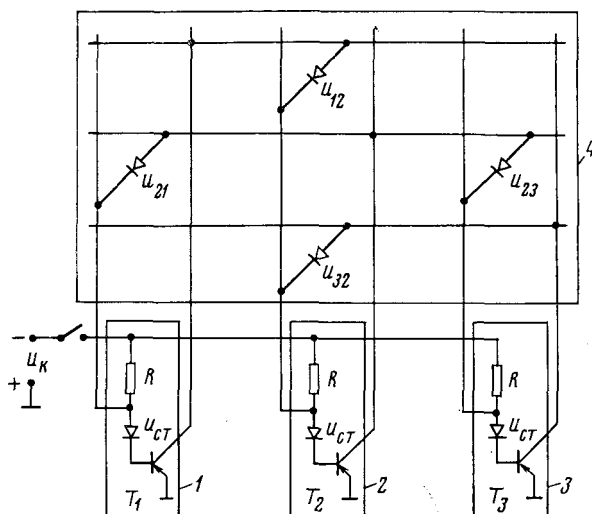


Рис. 2

Условимся, что $x_i = 1$, если транзистор T_i элемента i работает в режиме насыщения и $x_i = 0$, если он заперт. Для данной схемы

$$P' = \frac{U_K^2}{R} - \frac{U_{CT} U_K}{R}, \quad P'' = \frac{U_K^2}{R},$$

$$P = 3 \frac{U_K^2}{R} - s \frac{U_{CT} U_K}{R}.$$

В модели имеются два устойчивых состояния:

1) $x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1;$

2) $x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0.$

Таблица 1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}	u_{18}	u_{19}	u_{20}	u_{21}	u_{22}	u_{23}	u_{24}	u_{25}
u_1														1		1	1		1		1	1	1		1
u_2															1		1				1			1	1
u_3														1	1		1	1		1	1	1		1	
u_4														1	1	1		1	1	1			1	1	1
u_5																1	1		1	1	1				
u_6														1		1	1	1	1				1	1	1
u_7															1	1	1	1	1		1	1			
u_8																		1	1	1	1			1	1
u_9														1	1	1					1	1	1	1	
u_{10}																1	1		1	1		1	1		
u_{11}														1		1		1		1	1		1		1
u_{12}															1		1		1		1	1		1	
u_{13}														1		1		1		1	1		1		1
u_{14}	1		1	1		1			1		1		1										1	1	1
u_{15}		1	1	1			1		1			1								1	1	1			
u_{16}	1			1	1	1	1		1	1	1		1								1		1		1
u_{17}	1	1	1		1	1	1			1		1								1	1		1	1	
u_{18}			1	1		1	1	1			1		1								1		1		1
u_{19}	1			1	1	1	1	1		1		1								1		1		1	
u_{20}			1	1	1			1		1	1		1		1		1	1							
u_{21}	1	1	1		1		1	1	1		1	1	1		1	1	1	1							
u_{22}	1		1				1		1	1		1			1				1						
u_{23}	1			1		1			1	1	1		1	1		1	1	1							
u_{24}		1	1	1		1		1	1			1		1			1		1						
u_{25}	1	1		1		1		1			1		1	1		1		1							

Минимум выделяемой мощности будет иметь место в состоянии 1), которое соответствует оптимальному решению задачи.

Аналогично рассмотренному примеру могут быть получены схемы моделей задач больших размеров.

Описанный принцип построения электронных моделей комбинаторных задач практически проверен на лабораторных макетах с несколькими сотнями решающих элементов (⁷, ⁸). Для примера в табл. 1 приводится матрица смежности графа с 25 вершинами, для которого решалась задача определения множества максимальной мощности изолированных вершин. Результаты решения: $|V'|_{\max}=13$ и $V'_{\max}=\{v_i\}$, $i=1, \dots, 13$.

Институт электродинамики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
8 VII 1975

Институт прикладной математики
Тбилисского государственного университета
Тбилиси

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Антер, М. Женет и др., Автоматика и телемеханика, № 9 (1973). ² В. В. Васильев, А. Г. Додонов, Гибридные модели задач оптимизации, Киев, 1974. ³ Г. Е. Пухов, Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей, Киев, 1967. ⁴ Дж. Б. Деннис, Математическое программирование и электрические цепи, М., 1961. ⁵ Дж. Данциг, Линейное программирование, его обобщения и применения, М., 1966. ⁶ Прикладная комбинаторная математика, М., 1968. ⁷ Г. К. Шарашидзе, Аннотация докладов семинара Института прикладной математики, в в. 3, 4, 6, Тбилиси, 1971–1972. ⁸ Д. Л. Габрашвили, Г. К. Шарашидзе, Исследования некоторых вопросов вычислительной техники и электротехники. Тбилиси, 1973.