

О. В. РУДЕНКО, С. И. СОЛУЯН, академик Р. В. ХОХЛОВ

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПАРАКСИАЛЬНЫХ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ

Предложен метод анализа уравнения нелинейной акустики ограниченных пучков ⁽¹⁾, основанный на разложении решения в ряд по малому параметру — отношению текущего значения радиальной координаты r к характерной ширине пучка a на входе нелинейной среды. Такой подход аналогичен безабберрационному приближению в теории лазерной самофокусировки ⁽²⁾. Отличие состоит в том, что здесь вместо системы обыкновенных дифференциальных уравнений получается система нелинейных уравнений в частных производных. Решение такой системы, вообще говоря, представляет значительные трудности, однако ее удастся привести к канонической форме, содержащей нелинейный оператор с общей главной частью ⁽³⁾ и получить таким образом точные результаты. Графический анализ решения позволяет построить профиль волны на оси системы и вблизи от оси, а также проследить за изменением ширины пучка в различных фазах по мере распространения волны в среде.

Полученные ниже выражения имеют общий характер и позволяют рассматривать исходные возмущения с произвольной зависимостью от времени. Проанализирован, однако, лишь один конкретный случай, отвечающий заданию на границе $x=0$ монохроматической плоской волны

$$\rho' = \rho_0' \exp(-r^2/a^2) \sin \omega t. \quad (1)$$

Будем использовать основное уравнение в безразмерной форме

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial R}{\partial \sigma} - R \frac{\partial R}{\partial \theta} \right] = \frac{N}{4} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial R}{\partial \xi} \right); \quad (2)$$

здесь приняты обозначения: ρ' — возмущение плотности среды относительно равновесного значения ρ_0 , $R = \rho'/\rho_0'$, $\theta = \omega(t - x/c_0)$, c_0 — скорость звука, $\xi = r/a$, $\sigma = \varepsilon \omega \rho_0' x (c_0 \rho_0)^{-1}$ — расстояние в единицах длин образования разрыва, ε — нелинейный акустический параметр. Число

$$N = (2\pi^2 \varepsilon M)^{-1} (\lambda/a)^2,$$

введенное в работе ⁽⁴⁾, характеризует относительный вклад дифракционных и нелинейных эффектов в искажение профиля волны.

Ищем решение (2) в виде ряда

$$R(\sigma, \theta, \xi) = R_0(\sigma, \theta) + \frac{\xi^2}{2} R_2(\sigma, \theta) + \frac{\xi^4}{4} R_4(\sigma, \theta) + \dots \quad (3)$$

Получаемая отсюда бесконечная цепочка связанных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial R_0}{\partial \sigma} - R_0 \frac{\partial R_0}{\partial \theta} \right] &= \frac{N}{2} R_2; \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial R_2}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \theta} (R_0 R_2) \right] &= \frac{N}{3} R_4; \end{aligned} \quad (4)$$

может быть замкнута, если положить $R_4 = R_6 = \dots = 0$. Этот шаг делает последующие выкладки в общем случае приближенными; область применимости результатов будет ясна из дальнейших рассуждений.

Вводя новую переменную F , связанную с R_2 соотношением

$$R = \frac{2}{N} \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

удается свести систему (4) к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial \sigma} - R_0 \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \begin{pmatrix} R_0 \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Решением (5), как нетрудно проверить, являются следующие выражения:

$$R = \Phi_1(\psi) + \sigma \Phi_2(\psi), \quad (6)$$

$$F = \Phi_2(\psi), \quad \psi = \theta + \sigma R - \frac{1}{2} \sigma^2 F;$$

здесь $\Phi_{1,2}$ — произвольные функции, определяемые из граничного условия при $\sigma=0$. Для случая (1) имеем $\Phi_1 = \sin \psi$, $\Phi_2 = N \cos \psi$.

Оценки применимости этого результата могут быть получены линеаризацией (6) и сравнением его с разложением в ряд по ξ^2 точного решения

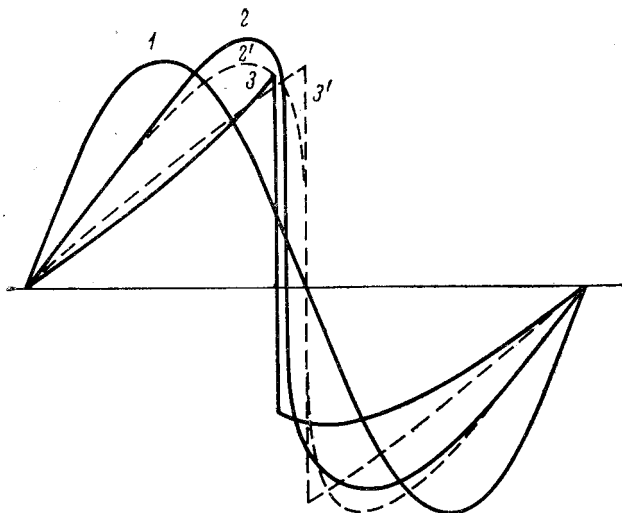


Рис. 1

линейной задачи (см., например, (5)). Такое сравнение показывает, что, помимо малого параметра ξ^2 , в задаче неизбежно возникает дополнительный малый параметр $N\sigma$; это делает результаты справедливыми в области $\sigma \ll N^{-1}$.

Использованное приближение, таким образом, значительно лучше описывает нелинейные эффекты, чем дифракцию. Поскольку наибольший интерес представляют расстояния $\sigma \geq 1$, естественным ограничением является условие $N \ll 1$ и членами $\sim N^2$ следует всюду пренебрегать. Необходимо, однако, подчеркнуть, что даже малые фазовые поправки в области крутых ударных фронтов могут существенно повлиять на поведение и форму волны.

На рис. 1 приведены результаты графического анализа решения (6) для поля на оси ($\xi=0$) при значении числа $N=0,4$. Кривая 1 изображает профиль волны при $\sigma=0$. Если бы волна была плоской, нелинейные эффекты приводили бы к искажению профиля, показанному кривыми 2' ($\sigma=1$) и 3' ($\sigma=2$). При значении же $N \neq 0$ форма волны изменяется существенно по-иному, несимметрично для областей сжатия и разрежения: положительный полупериод уменьшается по длительности, отрицатель-

ный — увеличивается; качественно эта тенденция отмечалась еще в работе ⁽¹⁾. Поскольку площади полупериодов должны быть равны, в некоторой области значений σ вблизи расстояния образования разрыва имеет место превышение амплитуды положительного полупериода над исходным значением, равным единице. Этот факт иллюстрирует кривая 2, соответствующая расстоянию $\sigma=1$. В разрывной области $\sigma>1$ отмеченный выброс «срезается» движущимся фронтом, но отличие от плоского случая 3' (кривая 3, $\sigma=2$) проявляется еще в большей степени.

Следует указать, что аналогичные результаты получены при численном исследовании уравнения (2), проведенном в работе ⁽⁶⁾. При графическом исследовании решения (6) отмечено смещение нулевых точек, соответствующее дифракционному изменению скорости распространения волны. Однако для удобства сравнения формы профилей при $N\neq 0$ и в плоском случае все кривые приведены к одному и тому же началу координат.

Развитый подход позволяет исследовать поведение несинусоидальных начальных возмущений, а также фокусированных и дефокусированных звуковых пучков. Эти данные, как и более подробное изложение установленных здесь результатов, будут опубликованы позднее.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 V 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов, Акустич. журн., т. 15, № 1, 40 (1969).
² С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН, т. 93, 19 (1967). ³ Д. Гильберт, Р. Курант, Методы математической физики, Гостехиздат, 1951. ⁴ О. В. Руденко, С. И. Солуян, Р. В. Хохлов, Акустич. журн., т. 19, № 6, 871 (1973). ⁵ О. В. Руденко, С. И. Солуян, Теоретические основы нелинейной акустики, «Наука», 1975.
⁶ П. С. Бахвалов, Я. М. Жилейкин и др., Тр. VI Международн. симпоз. по нелинейной акустике, М., 1975.