

А. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ

АКСИОМА МАРТИНА И СТРОЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ БИКОМПАКТОВ СЧЕТНОЙ ТЕСНОТЫ

(Представлено академиком П. С. Александровым 8 X 1975)

Формулировка аксиомы Мартина приведена в ⁽⁶⁾. Она обозначается через (AM). Аксиома Мартина вместе с предположением, что $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, обозначается через (AM^{*}). Основной технический результат — лемма 1. Из нее следует, например, что если принять (AM), то произведение бикомпакта Фреше — Урысона на однородный бикомпакт Фреше — Урысона является бикомпактом Фреше — Урысона (теорема 2). Это особенно любопытно в связи с результатом Малыхина, полученным независимо Бёме, Розенфельдом и Олсоном: в предположении аксиомы Мартина, существует бикомпакт Фреше — Урысона, квадрат которого не является пространством Фреше — Урысона.

Пусть A и B — множества в некотором топологическом пространстве. Будем писать $A \subset_1 B$, если $A \subset B$, и $A \subset_2 B$, если $[A] \subset B$. Другие обозначения такие же, как и в ⁽²⁾. Семейство θ подмножеств топологического пространства называется α -регулярным, где $\alpha \in \{1, 2\}$, если, каковы бы ни были $G' \in \theta$ и $G'' \in \theta$, существует $G \in \theta$ такое, что $G \subset G' \cap G''$.

Лемма 1 (AM^{*}). Пусть $\alpha \in \{1, 2\}$ и в пространстве X заданы непустые семейства ξ и η множеств и семейство γ семейств непустых множеств такие, что: 1) $|\gamma \cup \eta \cup \xi| < 2^{\aleph_0}$; 2) если $U' \in \xi$ и $U'' \in \xi$, то $U' \cap U'' \in \xi$; 3) если $V \in \eta$, $U \in \xi$ и $\mathcal{P} \in \gamma$, то существует $W \in \mathcal{P}$, для которого $W \subset U \cap V$; 4) если $W' \in \cup \gamma$, $W'' \in \cup \gamma$, $\mathcal{P} \in \gamma$ и $W' \cap W'' \neq \Lambda$, то существует $W \in \mathcal{P}$, для которого $W \subset W' \cap W''$; 5) если $\mu \subset \cup \gamma$ и μ дизъюнктно, то $|\mu| \leq \aleph_0$. Тогда

1. Существует последовательность $\{\mu_n: n \in N^+\}$ непустых подсемейств семейства $\cup \gamma$ такая, что: а) каждое μ_n α -регулярно; б) $|\cup \{\mu_n: n \in N^+\}| < 2^{\aleph_0}$; в) $\mu_n \cap \mathcal{P} \neq \Lambda$ для каждого $\mathcal{P} \in \gamma$; г) для каждого $U \in \xi$ существует $k \in N^+$ такое, что если $n \geq k$, то существует $W \in \mu_n$, для которого $W \subset U$; д) для каждого $V \in \eta$ и каждого $n \in N^+$ существует $k \in N^+$ такое, что $k \geq n$ и $W \subset V$ для некоторого $W \in \mu_k$. Если, кроме того, выполняется условие: 6) если $\theta \subset \cup \gamma$, $|\theta| < 2^{\aleph_0}$, $\theta \cap \mathcal{P} \neq \Lambda$ для каждого $\mathcal{P} \in \gamma$ и θ α -регулярно, то $\cap \theta \neq \Lambda$, то:

2. В X существует последовательность $\{x_n: n \in N^+\}$ точек такая, что каждый элемент семейства ξ содержит все члены этой последовательности, начиная с некоторого, и каждый элемент семейства η содержит бесконечное множество ее членов.

Доказательство. Семейство $\mathcal{B} = \{\cap \lambda: \lambda \subset \cup \gamma \text{ и } |\lambda| < \aleph_0\}$ является базой некоторой топологии $\mathcal{T}^*$ на X . В силу 4) в каждое дизъюнктивное подсемейство семейства $\mathcal{B} \setminus \{\Lambda\}$ вписано дизъюнктивное подсемейство семейства $\cup \gamma$. Отсюда и из 5) следует, что каждое дизъюнктивное семейство открытых множеств в $(X, \mathcal{T}^*)$ счетно.

Положим $\lambda = (\cup \gamma) \cup \{X\}$, $Q = \{q: N^+ \rightarrow \lambda, \text{ существует } k \in N^+, \text{ для которого } q^{-1}(\{X\}) = N^+ \setminus \{1, \dots, k\}\}$. Если $q \in Q$, то $A(q) = N^+ \setminus q^{-1}(\{X\})$ и $r(q) = |A(q)| = k$. Число $r(q)$ называется рангом q . Далее, $T = Q \times \xi$, $X_i = (X, \mathcal{T}^*)$ для каждого $i \in N^+$ и $X^* = (X, \mathcal{T}^*)^{\aleph_0} = \prod \{X_i: i \in N^+\}$ (произве-

дение — топологическое). Если $q \in Q$, то $\langle q \rangle = \Pi \{q(i) : i \in N^+\}$ — каноническое открытое множество в пространстве X^* . Из $c(X, \mathcal{T}^*) \leq \aleph_0$ следует, в силу (АМ*) (см. (2) и (8)), что $c(\bar{X}^*) \leq \aleph_0$.

На $T = Q \times \xi$ вводится частичное упорядочение $<$ следующим образом: для $t' = (q', U') \in T$ и $t'' = (q'', U'') \in T$ полагаем $t' < t''$, если: а₁) $q'(i) \supset \supset q''(i)$, для каждого $i \in N^+$; а₂) $U'' \subset U'$; а₃) $\cup \{q''(i) : i \in A(q'') \setminus A(q')\} \subset U'$ и а₄) $t' \neq t''$.

Покажем, что каждая антицепь C в $T, <$ счетна.

Предположим противное. Для каждого $k \in N^+$ положим $C_k = \{\langle q \rangle : r(q) = k \text{ и существует } U \in \xi, \text{ для которого } (q, U) \in C\}$. Либо существуют $t' = (q', U') \in C$, $t'' = (q'', U'') \in C$, для которых $t' \neq t''$, но $\langle q' \rangle = \langle q'' \rangle$, либо при некотором $k^* \in N^+$ множество C_{k^*} бесконечно. Во втором случае C_{k^*} не дизъюнктивно, так как $c(X^*) \leq \aleph_0$. Значит, существуют такие $t' = (q', U') \in C$ и $t'' = (q'', U'') \in C$, что $t' \neq t''$, $\langle q' \rangle \cap \langle q'' \rangle \neq \Lambda$ и $r(q') = r(q'') = k^*$. Такие t' и t'' существуют и в первом случае (тривиально). Тогда $q'(i) \cap q''(i) \neq \Lambda$ для каждого $i \in N^+$. В силу 4), можно выбрать $W_i \in \cup \gamma$ так, чтобы было $W_i \subset q'(i) \cap q''(i)$. Положим $\tilde{q}(i) = W_i$, когда $i \in \{1, \dots, k^*\}$, и $\tilde{q}(i) = X$, когда $i > k^*$. Тогда $\tilde{q} \in Q$ и $r(\tilde{q}) = k^*$. Положим $\tilde{U} = U' \cap U''$. В силу 2) $\tilde{U} \in \xi$. Значит, $\tilde{t} = (\tilde{q}, \tilde{U}) \in T$. Очевидно, $t' \leq \tilde{t}$ и $t'' \leq \tilde{t}$. Итак, элементы t' и t'' сравнимы — в противоречии с тем, что они суть различные элементы антицепи C . Значит, каждая антицепь в $T, <$ счетна.

Для каждого $s = \{\mathcal{P}, n, V, U\} \in \gamma \times N^+ \times \eta \times \xi$ положим $\mathcal{D}_s = \{t = (q, U') \in T : U' \subset U, q(i) \in \mathcal{P} \text{ для каждого } i \leq r(q), \text{ и существует такое } i \in A(q), \text{ что } i \geq n \text{ и } q(i) \subset U \cap V\}$.

Мощность семейства $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_s : s \in \gamma \times N^+ \times \eta \times \xi\}$ не превосходит мощности множества $\gamma \times N^+ \times \eta \times \xi$ и, значит, меньше, чем $2^{\aleph_0}$.

Покажем, что при любом $s = \{\mathcal{P}, n, V, U\} \in \gamma \times N^+ \times \eta \times \xi$ $\mathcal{D}_s$ плотно в $T, <$. Пусть $t' = (q', U') \in T$. Для каждого $i \in A(q')$ существует $W_i \in \mathcal{P}$ такое, что $W_i \subset q'(i)$ в силу 4). Положим $i^* = \max \{r(q') + 1, n\}$. В силу 2) и 3)

существует $W^* \in \mathcal{P}$, для которого $W^* \subset U' \cap U \cap V$. Определим теперь $q'' \in Q$ так: если $i \in A(q')$, то $q''(i) = W_i$; если $r(q') < i \leq i^*$, то $q''(i) = W^*$; если $i > i^*$, то $q''(i) = X$. Положим $U'' = U' \cap U$ и $t'' = (q'', U'')$. Очевидно, $t'' \in T$, $t'' \in \mathcal{D}_s$ и $t' < t''$ ($t' \neq t''$, так как $r(q'') > r(q')$). Значит, $\mathcal{D}_s$ плотно в $T, <$.

В силу аксиомы Мартина, отнесенной к $T, <$ и $\mathcal{D}$, существует $G \subset T$ со свойствами: м₁) $G \cap \mathcal{D}_s \neq \Lambda$ для каждого $\mathcal{D}_s \in \mathcal{D}$ и м₂) для любых $t_1 \in G$ и $t_2 \in G$ существует $t_3 \in G$ такое, что $t_1 \leq t_3$ и $t_2 \leq t_3$. Можно, кроме того, считать, что: м₃) $|G| \leq |\mathcal{D}| < 2^{\aleph_0}$. Из определения G следует: м₄) каковы бы ни были $t = (q, U) \in G$ и $n \in N^+$, существует $t' = (q', U') \in G$, для которого $t < t'$ и $A(q') \supseteq n$. Положим $L = \{q \in Q : \text{существует } U \in \xi, \text{ для которого } (q, U) \in G\}$. Далее, $\lambda_i = \{q(i) : q \in L\}$ и $\mu_i = \lambda_i \setminus \{X\}$, $i \in N^+$. В силу м₂) и а₁), λ_i α -регулярно. В силу м₁), $\lambda_i \neq \{X\}$, каково бы ни было $i \in N^+$. Значит, каждое μ_i — непустое α -регулярное подсемейство семейства $\cup \gamma$. Очевидно, $|\mu_i| \leq |G|$ и потому $|\cup \{\mu_i : i \in N^+\}| \leq |G| \cdot \aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Из определения $\mathcal{D}$ и м₁) следует, что $\mu_i \cap \mathcal{P} \neq \Lambda$ для каждого $i \in N^+$ и каждого $\mathcal{P} \in \gamma$. Покажем, что $\{\mu_n : n \in N^+\}$ удовлетворяет требованиям г) и д) из 1).

Пусть $\tilde{U} \in \xi$. Возьмем любые $\tilde{\mathcal{P}} \in \gamma$, $\tilde{n} \in N^+$ и $\tilde{V} \in \eta$ и положим $\tilde{s} = \{\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{n}, \tilde{V}, \tilde{U}\}$. В силу м₁), $\mathcal{D}_{\tilde{s}} \cap G \neq \Lambda$. Пусть $t' = (q', U') \in \mathcal{D}_{\tilde{s}} \cap G$, $k = r(q') + 1$ и $n \geq k$. В силу м₄), существует $t'' = (q'', U'') \in G$, для которого $t' < t''$ и $n \in A(q'')$. Тогда $n \in A(q'') \setminus A(q')$ и, в силу а₃), $q''(n) \subset U'$. Но $U' \subset \tilde{U}$, так как $t' \in \mathcal{D}_{\tilde{s}}$. Значит, $q''(n) \subset \tilde{U}$, причем $q''(n) \in \mu_n$ (ибо $n \in A(q'')$). Итак, условие г) выполняется — множество $W = q''(n)$ — непустое. Рассмотрим теперь любые $V^* \in \eta$ и $n^* \in N^+$. Зафиксируем $\mathcal{P}^* \in \gamma$ и $U^* \in \xi$, и пусть $s^* = \{\mathcal{P}^*, n^*, V^*, U^*\}$. Тогда $\mathcal{D}_{s^*} \cap G \neq \Lambda$. Пусть $\tilde{t} = (\tilde{q}, \tilde{U}) \in \mathcal{D}_{s^*} \cap G$. Для некоторого $k \in N^+$ имеем: $k \geq n^*$, $k \in A(\tilde{q})$, $\tilde{q}(k) \subset U^* \cap V^*$ и $\tilde{q}(k) \in \mu_k$, чем д) доказано.

Чтобы получить такую последовательность, как в 2, достаточно, воспользовавшись условиями 1а) и б), выбрать произвольно $x_n \in \cap \mu_n$. Лемма 1 доказана.

Полагая $\alpha=1$, мы получаем такое топологическое следствие из леммы 1, которое в (АМ*) усиливает результат Шапировского из (7) (ТАМ) и замечательную лемму Буса (см. (4)) одновременно:

Предложение А (АМ*). Пусть в пространстве X , удовлетворяющем условию Суслина, заданы система γ π -баз и семейства ξ и η открытых множеств такие, что: а') $|\gamma \cup \xi \cup \eta| < 2^{\aleph_0}$; б') если $U' \in \xi$ и $U'' \in \xi$, то $U' \cap U'' \in \xi$; в') если $U \in \xi$ и $V \in \eta$, то $U \cap V \neq \Lambda$. Тогда существует в X счетное семейство $\{\mu_i: i \in \mathbb{N}^+\}$ централизованных семейств открытых множеств такое, что:

1') $\cup \{\mu_i: i \in \mathbb{N}^+\} \supset \xi \cup \eta$; 2') $\mu_i \cap \mathcal{P} \neq \Lambda$ для всех $i \in \mathbb{N}^+$ и всех $\mathcal{P} \in \gamma$; 3') для каждого $V \in \eta$ множество $\{i \in \mathbb{N}^+: V \in \mu_i\}$ бесконечно и 4') для каждого $U \in \xi$ множество $\{i \in \mathbb{N}^+: U \notin \mu_i\}$ конечно. (Условия 3') и 4') влекут 1').)

З а м е ч а н и е. Шапировским получен также специальный случай предложения А, в котором фигурируют только ξ и γ , но нет η ; однако он доказывает свои утверждения в более слабом предположении (АМ) (см. (6)).

Скажем, что T_3 -пространство X принадлежит классу $\mathcal{H}_c$, если выполняются следующие условия: $h_1)$ $c(X) \leq \aleph_0$; $h_2)$ существует семейство γ π -баз пространства X , для которого $|\gamma| < 2^{\aleph_0}$ и, если $\theta \subset \cup \gamma$, θ 2-регулярно и $\theta \cap \mathcal{P} \neq \Lambda$ для каждого $\mathcal{P} \in \gamma$, то $\theta \neq \Lambda$. T_3 -пространство X назовем слабо-чеховским, если в его волмэновском расширении существует семейство λ открытых множеств такое, что $|\lambda| < 2^{\aleph_0}$ и $\cap \lambda = X$. Очевидно, если X слабо-чеховское и $c(X) \leq \aleph_0$, то $X \in \mathcal{H}_c$. Далее, если X всюду плотно в T_3 -пространстве Y и $X \in \mathcal{H}_c$, то и $Y \in \mathcal{H}_c$. Из леммы 1 сразу следуют два такие утверждения:

Предложение 1 (АМ*). Пусть $X \in \mathcal{H}_c$ и η, ξ — непустые семейства открытых множеств в X такие, что: 1₁) $|\eta \cup \xi| < 2^{\aleph_0}$; 1₂) если $U' \in \xi$ и $U'' \in \xi$, то $U' \cap U'' \in \xi$; 1₃) если $U \in \xi$ и $V \in \eta$, то $U \cap V \neq \Lambda$. Тогда существует счетное множество $A \subset X$ такое, что $A \setminus U$ конечно для каждого $U \in \xi$ и $A \cap U \cap V \neq \Lambda$ для всех $U \in \xi$ и $V \in \eta$.

Предложение 2 (АМ). Пусть X — счетное T_1 -пространство, $x^* \in X$, $0 < \chi(x^*, X) < 2^{\aleph_0}$, и S — семейство последовательностей в $X \setminus \{x^*\}$ такое, что $|S| < 2^{\aleph_0}$ и x^* является предельной точкой для каждой $s \in S$. Тогда в $X \setminus \{x^*\}$ существует последовательность s^* , сходящаяся в X к x^* , которая с каждой последовательностью $s \in S$ имеет общую подпоследовательность.

Доказательство предложения 2. Пусть ξ' — база x^* в X , для которой $|\xi'| < 2^{\aleph_0}$. Для каждого $s \in S$ пусть $\|s\|$ — множество точек последовательности s , и $\eta = \{\|s\|: s \in S\}$. Тогда $|\eta| < 2^{\aleph_0}$. Положим $\mathcal{P} = \{\{x\}: x \in X \setminus \{x^*\}\}$, $\gamma = \{\mathcal{P}\}$ и $\xi = \{\cap \lambda: \lambda \subset \xi' \text{ и } |\lambda| < \aleph_0\}$. Тогда X, γ, η и ξ удовлетворяют посылкам леммы 1 и ее заключение 2) дает искомую последовательность.

Из предложения 2 немедленно следует

Предложение 3 (АМ). Если X — T_1 -пространство счетной тесноты и $\chi(x, X) < 2^{\aleph_0}$ для каждого $x \in X$, то $X \in \langle \alpha_2 - FU \rangle$ (см. (3)).

Лемма 2. Пусть X — однородный бикомпакт, удовлетворяющий одному из следующих условий: а) $|X| < 2^{2^{\aleph_0}}$; б) $t(X) \leq \aleph_0$ и, для каждого счетного $A \subset X$, $|[A]| < 2^{2^{\aleph_0}}$; в) X секвенциален. Тогда $\chi(X) < 2^{\aleph_0}$.

Мощность однородного секвенциального бикомпакта не превосходит $2^{\aleph_0}$ (1), чем в) сводится к а). Если верно б), то в X есть бикомпакт F такой, что $|F| < 2^{2^{\aleph_0}}$ и $\chi(F, X) \leq \aleph_0$ (см. (1), лемма 2). Достаточно теперь применить известную теорему Поспишила (5). Достаточность а) следует из той же теоремы непосредственно. Из леммы 2в) и предложения 3) вытекает (см. также предложение 4 в (3))

Теорема 1 (АМ). Каждый однородный секвенциальный бикомпакт принадлежит $\langle \alpha_2 - FU \rangle$.

Теорема 2 (АМ). Произведение бикомпакта Фреше — Урысона на однородный бикомпакт Фреше — Урысона является бикомпактом Фреше — Урысона.

Следствие (АМ). Любая конечная степень однородного бикомпакта Фреше — Урысона является (однородным) бикомпактом Фреше — Урысона.

Вместе с результатом Малыхина и Олсона (см. (6), теорема 2.2) теоремы 1 и 2 влекут следующее утверждение.

Теорема 3 (АМ). Существует сепарабельный бикомпакт Фреше — Урысона (следовательно, мощности не большей, чем $2^{\aleph_0}$), который не вкладывается топологически ни в какой однородный секвенциальный бикомпакт.

Вопросы: 1) Каждый ли однородный бикомпакт счетной тесноты секвенциален? 2) Каждый ли однородный секвенциальный бикомпакт является пространством Фреше — Урысона? 3) Каждый ли однородный бикомпакт Фреше — Урысона удовлетворяет первой аксиоме счетности? 4) Верно ли, что мощность каждого однородного бикомпакта счетной тесноты не превосходит $2^{\aleph_0}$? 5) Верно ли, что мощность каждого бесконечного однородного бикомпакта является степенью двойки? 6) Верно ли, что каждый бесконечный однородный бикомпакт: а) содержит нетривиальную сходящуюся последовательность, б) содержит однородный бикомпакт мощности $2^{\aleph_0}$, в) содержит бесконечный однородный сепарабельный бикомпакт? 7) Верна ли теорема 3 «наивно»?

Как мы видели (теорема 1), ответ на 2) положителен, если принять (АМ). В (1) показано, что ответ на 3) положителен в предположении (СН). Заметим в связи с 4), что, как вытекает из леммы 2 и результатов Шапировского в (6, 7), если (АМ) и X — однородный бикомпакт, для которого $s(X) \leq \aleph_0$ и $|X| < 2^{2^{\aleph_0}}$, то в X существует счетное множество A , секвенциальное замыкание которого равно X (и, значит, $s(X) \leq \aleph_0$ и $|X| \leq 2^{\aleph_0}$).

Примечание при корректуре. Предложение 2 зависит только от (А.М.), так как соотношение $s(X, \mathcal{T}^*)$ (см. доказательство леммы 1) следует непосредственно из счетности X .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Архангельский, ДАН, т. 192, № 2 (1970). ² А. В. Архангельский, ДАН, т. 199, № 6 (1971). ³ А. В. Архангельский, ДАН, т. 206, № 2 (1972). ⁴ D. Booth, Ann. Math. Logic, v. 2, № 1 (1970). ⁵ E. Čech, B. Pospíšil, Publ. Fac. Sci., Univ. Masaryk, v. 258, N 1 (1938). ⁶ В. И. Малыхин, Б. Э. Шапировский, ДАН, т. 213, № 3 (1973). ⁷ Б. Э. Шапировский, ДАН, т. 218, № 1 (1974). ⁸ I. Juhász, Cardinal Functions in Topology, Amsterdam, 1971. ⁹ G. Tironi, R. Isler, Proc. Third Prague Symp., Prague, 1972.