

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

Академик АН УзССР Т. А. САРЫМСАКОВ, С. Н. НАСИРОВ,
Дж. ХАДЖИЕВ

ОПИСАНИЕ ИДЕАЛОВ ОДНОГО КЛАССА КОЛЕЦ

В работе ⁽¹⁾ для каждой топологической алгебры Буля ∇ было построено универсальное топологическое полуполе S_∇ , частным случаем которого является кольцо измеримых функций на множестве конечной меры; в работе ⁽²⁾ были описаны все идеалы кольца S_∇ .

В настоящей заметке для произвольной полной булевой алгебры ∇ (не обязательно топологической) и фиксированного бикompактного расширения bE заданного топологического поля E строится некоторое кольцо $S(\nabla, bE)$. Описываются все идеалы кольца $S(\nabla, bE)$, находится связь между кольцами $S(\nabla, b_1E)$ и $S(\nabla, b_2E)$ для различных бикompактных расширений b_1E и b_2E . Затем, в случае, когда ∇ — топологическая алгебра Буля, $S(\nabla, bE)$ превращается в топологическое кольцо и изучаются замкнутые идеалы в нем. Кольцо S_∇ получается из нашей конструкции в случае $E=R$, где R — поле действительных чисел.

Обозначим через $X(\nabla)$ экстремально несвязный бикompакт, соответствующий полной алгебре Буля ∇ . Пусть E — фиксированное топологическое поле, bE — произвольное бикompактное хаусдорфово расширение пространства E . Непрерывное отображение $f: X(\nabla) \rightarrow bE$ назовем допустимым, если прообраз $f^{-1}(bE \setminus E)$ параста $bE \setminus E$ нигде не плотен в $X(\nabla)$.

Множество всех допустимых отображений из $X(\nabla)$ в bE обозначим через $S(\nabla, bE)$.

Теорема 1. *В множестве $S(\nabla, bE)$ можно (и притом единственным способом) определить операции сложения и умножения, превращающие $S(\nabla, bE)$ в коммутативное ассоциативное кольцо с единицей и обладающее тем свойством, что если $f, g \in S(\nabla, bE)$, то*

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\end{aligned}$$

во всех точках $x \in f^{-1}(E) \cap g^{-1}(E)$.

Замечание. В случае, когда $E=Z_2$, имеем, что $bZ_2=Z_2$ и для любой полной алгебры Буля ∇ кольцо $S(\nabla, Z_2)$ изоморфно ∇ .

Из теоремы 1, в частности, вытекает, что для любых бикompактных расширений b_1E и b_2E топологического поля E кольца $S(\nabla, b_1E)$ и $S(\nabla, b_2E)$ изоморфны.

Всюду дальше под идеалом понимаем собственный идеал кольца $S(\nabla, bE)$.

Теорема 2. *Пусть J — произвольный идеал в $S(\nabla, bE)$.*

Тогда существует замкнутое подмножество M пространства $X(\nabla)$, обладающее следующими свойствами:

1) *для каждого $f \in J$ найдется открытое подмножество $U_f \supset M$ в $X(\nabla)$ такое, что $f(x) = 0$ при $x \in U_f$;*

2) *для каждого $x_0 \notin M$ найдется $f \in J$ такое, что $f(x_0) \neq 0$, $f(x_0) \in E$.*

Замкнутое множество $M_J = \{x \in X(\nabla) \mid f(x) = 0 \text{ для всех } f \in J\}$, следуя 2), назовем характеристическим множеством идеала J .

Легко видеть, что для каждого замкнутого множества M в $X(\nabla)$ существует идеал J в $S(\nabla, bE)$ такой, что $M_J = M$.

Отсюда, в частности вытекает, что для идеала J следующие условия эквивалентны:

- 1) J — максимальный идеал;
- 2) J — простой идеал;
- 3) M_J состоит из одной точки.

Пусть J — некоторый идеал в $S(\nabla, bE)$. Замкнутое множество M_J представимо в виде $M_J = U_J \cup N_J$, где $U_J \cap N_J = \emptyset$, U_J — открыто-замкнутое множество, N_J — замкнутое нигде не плотное подмножество $X(\nabla)$.

Теорема 3. Для того чтобы идеал J в $S(\nabla, bE)$ был главным, необходимо и достаточно, чтобы множество N_J было пусто.

Пусть теперь ∇ — топологическая алгебра Буля и $S(\nabla, bE)$ — соответствующее кольцо. Если e — некоторый элемент из ∇ , то через Se обозначим его дополнение, а через U_e — открыто-замкнутое множество из $X(\nabla)$, соответствующее элементу $e \in \nabla$.

Пусть Γ — произвольная окрестность нуля в ∇ . Для данной окрестности нуля V в bE положим:

$$W_{\Gamma, V} = \left\{ f \in S(\nabla, bE) \left| \begin{array}{l} \text{существует такой элемент } e \in \Gamma, \\ \text{что } f(x) \in V \text{ при } x \in U_{Se} \end{array} \right. \right\}$$

Теорема 4. Система множеств $\{f + W_{\Gamma, V}\}$ (где f — произвольный элемент из $S(\nabla, bE)$, Γ — произвольная окрестность нуля в ∇ , V — произвольная окрестность нуля в bE) может быть принята за базу окрестностей в $S(\nabla, bE)$, благодаря чему $S(\nabla, bE)$ превращается в топологическое кольцо.

Топологию, порожденную системой множеств $W_{\Gamma, V}$, обозначим через τ .

Теорема 5. Идеал J в $(S(\nabla, bE), \tau)$ замкнут тогда и только тогда, когда $N_J = \emptyset$.

Следствие 1. Если ∇ — алгебра Буля 2-го рода, то в $(S(\nabla, bE), \tau)$ не существует замкнутых максимальных идеалов и всякий максимальный идеал всюду плотен.

Следствие 2. Идеал J в $S(\nabla, bE)$ всюду плотен тогда и только тогда, когда $U_J = \emptyset$.

Следствие 3. Если ∇ — алгебра Буля 1-го рода, то каждый максимальный идеал замкнут.

Замечание. Теоремы 2, 3 и 5 в случае, когда $E=R$ и ∇ — топологическая алгебра Буля, были получены В. Э. Семеновым ⁽²⁾.

Ташкентский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
8 VII 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков, Топологические алгебры Буля, Ташкент, 1963. ² В. Э. Семенов, Функциональный анализ и его приложения, т. 7, № 1, 86 (1973).