

УДК 62-50

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. Н. АФАНАСЬЕВ, В. Д. ФУРАСОВ

**ПОСТРОЕНИЕ САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ РЕГУЛЯТОРОВ
НА ОСНОВЕ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА**

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 8 X 1975)

Применение принципов построения самонастраивающихся контуров обратной связи позволяет сравнительно просто получить решение задачи синтеза асимптотически устойчивых систем ⁽¹⁾ при неполной информации о параметрах стабилизируемого объекта. Так, в соответствии с ⁽²⁾ регулятор

$$u = -(c + \Delta k)^T x, \quad \Delta^* k = \lambda c^T x x, \quad \lambda = \text{const} > 0 \quad (1)$$

является решением задачи о стабилизации объекта

$$\dot{x} = Ax + b(a^T x + u), \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix},$$

если ⁽³⁾

$$c = \Gamma b, \quad \Gamma A + A^T \Gamma - 2\Gamma b b^T \Gamma + 2\alpha \Gamma = 0, \quad \Gamma > 0, \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) разрешимо аналитически и регулятору (1) вместе с функцией $V_0 = (a - \Delta k)^T (a - \Delta k)$ можно поставить в соответствие функцию $V_1 = x^T \Gamma x$. Производные названных функций, определенные на движениях (2), (1), приводятся к виду

$$\dot{V}_0 = -2\lambda c^T x (a - \Delta k)^T x, \quad \dot{V}_1 = -2\alpha x^T \Gamma x + 2c^T x (a - \Delta k)^T x. \quad (4)$$

Отсюда легко увидеть, что регулятор (1) может обладать приемлемыми динамическими свойствами лишь на множестве $c^T x (a - \Delta k)^T x \geq 0$.

Улучшение свойств самонастраивающихся регуляторов в рамках рассматриваемого метода обеспечивается построением вспомогательного контура обратной связи. Уравнения простейшего контура подобного типа по аналогии с ⁽⁴⁾ находятся в виде

$$\dot{z}_1 = p^T (A - b c^T) x + z_2 + 2\beta (p^T x - z_1), \quad \dot{z}_2 = -\Delta^* k^T x + 2\beta^2 (p^T x - z_1). \quad (5)$$

Здесь p — n -мерный вектор, $p^T b = 1$, β — положительная постоянная, характеризующая темп затухания процессов рассогласования контура (z_1, z_2) с объектом $(p^T x, (a - \Delta k)^T x)$. При некоторых упрощающих предположениях уравнения (5) устойчивы по переменным $\xi_1 = p^T x - z_1$, $\xi_2 = (a - \Delta k)^T x - z_2$ с оценкой

$$\xi^T(t) L \xi(t) \leq \xi^T(0) L \xi(0) e^{-2\beta t}, \quad \text{где } L = \begin{bmatrix} (2\beta)^{-1} & -(2\beta)^{-2} \\ -(2\beta)^{-2} & 2(2\beta)^{-3} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

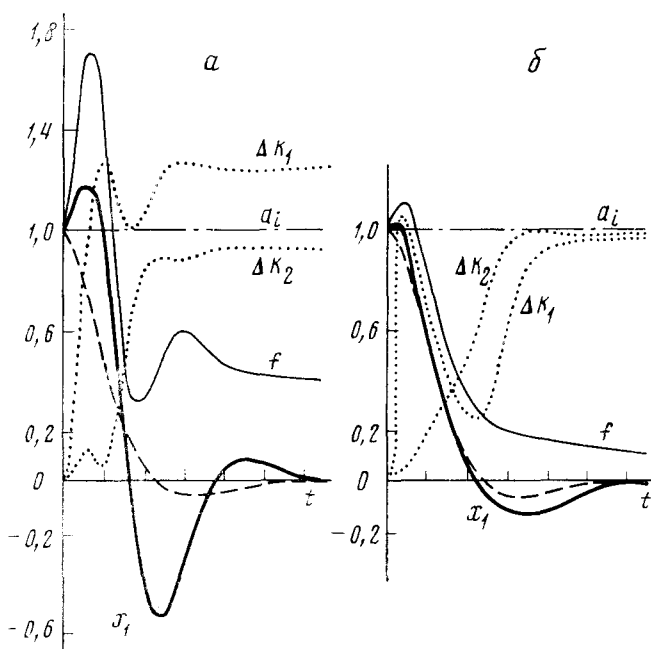


Рис. 1. Переходные процессы систем (2), (1) (а) и (2), (5) (б)

Учитывая (6), самонастраивающийся регулятор определим уравнениями

$$u = -(c + \Delta k)^T x, \quad \Delta \dot{k} = \lambda c^T x x + \mu(x, z, t), \quad (7)$$

$$\dot{z}_1 = p^T (A - bc^T) x + z_2 + 2\beta (p^T x - z_1), \quad \dot{z}_2 = -\Delta \dot{k}^T x + 2\beta^2 (p^T x - z_1),$$

где μ — произвольная вектор-функция, выбираемая из условия

$$x^T \mu (1 + \nu |p^T x - z_1|) x^T x \geq \gamma z_2 \quad (\|x\| \neq 0; \gamma, \nu = \text{const}, \gamma > 0, \nu \geq 0).$$

Оправдать построение (7) можно следующим образом. На движениях (2), (7) в отличие от (4), начиная с некоторого момента времени $t \geq \tau(\beta)$,

$$\dot{V}_0 \approx -2\lambda c^T x (a - \Delta k)^T x - 2\gamma ((a - \Delta k)^T x)^2.$$

Строгое исследование замкнутой системы достигается объединением функций

$$V_1 = x^T \Gamma x, \quad V_2 = \xi^T L \xi, \quad V_3 = ((a - \Delta k)^T x)^2,$$

отвечающих различным уровням иерархии регулятора, в векторную функцию Ляпунова ⁽⁵⁾.

Пусть на рассматриваемом множестве состояния и параметров объекта

$$\dot{V}_1 + 2\alpha V_1 \leq 2s_{13} (V_1 V_3)^{1/2}, \quad \dot{V}_2 + 2\beta V_2 \leq 2s_{21} (V_2 V_1)^{1/2} + 2s_{22} V_2 + 2s_{23} (V_2 V_3)^{1/2}, \\ \dot{V}_3 + 2\gamma V_3 \leq 2s_{31} (V_3 V_1)^{1/2} + 2s_{32} (V_3 V_2)^{1/2} + 2s_{33} V_3, \quad s_{ij} = \text{const}, \quad s_{ij} \leq 0,$$

тогда при всех $t \geq 0$

$$V_i(t) \leq \rho_i^2(t), \quad i = 1, 2, 3,$$

если $(V_i(0))^{1/2} \leq \rho_i(0)$, и равномерная асимптотическая устойчивость ⁽⁶⁾ системы (2), (7) следует из асимптотической устойчивости уравнений

$$\dot{\rho}_1 = -\alpha \rho_1 + s_{13} \rho_3, \quad \dot{\rho}_2 = s_{21} \rho_1 - (\beta - s_{22}) \rho_2 + s_{23} \rho_3, \\ \dot{\rho}_3 = s_{31} \rho_1 + s_{32} \rho_2 - (\gamma - s_{33}) \rho_3. \quad (8)$$

Применение векторных функций Ляпунова при построении самонастраивающихся регуляторов позволяет, таким образом, не только установить устойчивость, но и получить оценки переходных процессов замкнутой системы. Условиям асимптотической устойчивости (8) всегда можно удовлетворить за счет выбора определяющих параметров вспомогательного контура β и γ при фиксированном значении α .

Сделанное утверждение легко обобщается на случай достаточно гладких нестационарных ($a=a(t)$) и нелинейных ($a=a(x, t)$) объектов управления, а также на системы взаимосвязанных объектов, переходные процессы которых описываются уравнениями

$$\dot{x}_i = Ax_i + b(x_i^T a_i(x_1, \dots, x_l, t) + u_i), \quad i=1, \dots, l.$$

Приведем для полноты изложения результаты моделирования (рис. 1) систем (2), (1) и (2), (7) на ЦВМ при

$$\eta=2, \quad \alpha=1/2, \quad \beta=5, \quad \lambda=1, \quad \mu=50z_2x, \quad v=0, \quad p^T=[0, 1], \\ a_1=a_2=1, \quad x_1(0)=1, \quad x_2(0)=0, \quad z_1(0)=z_2(0)=0.$$

Пунктирной кривой на рисунках показан переходный процесс системы при $\Delta k_i = a_i$. Кривой f характеризуется ее реакция на «неизвестное регулятору» входное возмущающее воздействие $f=1$.

В заключение авторы выражают благодарность К. А. Пупкову, по инициативе которого выполнена данная работа.

Московский институт электронного
машиностроения

Поступило
6 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. М. Легов, Дифференциальные уравнения, т. 6, № 4, 592 (1970). ² Б. И. Петров, В. Ю. Рутковский и др., Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления, М., 1972. ³ В. Д. Фурасов, Автоматика и телемеханика, № 2, 17 (1973). ⁴ Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб, Очерки по математической теории систем, М., 1971. ⁵ В. М. Матросов, Автоматика и телемеханика, № 9, 63 (1969). ⁶ Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959.