

В. М. ФЕДОРОВ

АЛГОРИТМ ХАКЕНА ПРИМИТИВНО РЕКУРСИВЕН

(Представлено академиком П. С. Александровым 9 X 1975)

Настоящая заметка посвящена изложению схемы доказательства примитивной рекурсивности алгоритма Хакена (см. (1)), который вычисляет род узла k в трехмерной сфере S^3 . Согласно лемме Дена, род узла равен нулю в том и только том случае, когда узел k тривиален. Поэтому этот алгоритм одновременно вычисляет характеристическую функцию узла.

Пусть задано кубическое разбиение Δ сферы S^3 , состоящее из двух кубов, склеенных по границе при помощи тождественного отображения. Обозначим через Δ^n n -кратное измельчение разбиения Δ , а через S^2 — границу куба начального разбиения. Каждый одномерный подкомплекс S^2 в разбиении Δ^n , являющийся непрерывной замкнутой кривой на S^2 , можно рассматривать как узел в S^3 . Достаточно в каждой точке p самопересечения этой кривой ввести коэффициент $\varepsilon(p) = \pm 1$. Заметим, что уже в разбиении Δ^{n+1} узел реализуется в S^3 без пересечений. Поэтому далее, если не оговорено противное, под узлом понимаем кривую без пересечений.

Обозначим через $\Sigma(\Delta^n)$ нормальное разбиение (см. (2)), соответствующее Δ^n , а через $f_1(n)$ и $f_2(n)$ — количество типов сечений и дуг в $\Sigma(\Delta^n)$ соответственно.

Лемма 1. *Функции $f_1(n)$ и $f_2(n)$ примитивно рекурсивны и их порядок роста экспоненциальный: $f_i(n) \sim 2^{c_i n}$, c_i — постоянные, не зависящие от n .*

Определим элементы матриц $A(n)$ и $B(n)$ для заданного нормального разбиения $\Sigma(\Delta^n)$ (см. (2)):

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я дуга принадлежит } j\text{-му сечению;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$b_{ih} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я и } h\text{-я дуги связаны;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда система нормальных уравнений (см. (1)) для разбиения $\Sigma(\Delta^n)$ имеет вид

$$b_{ih} \sum_{j=1}^{f_1(n)} (a_{ij} - a_{hj}) x_j = 0, \quad i, h = 1, 2, \dots, f_2(n).$$

Более точно необходимо добавить еще уравнения, которые определяют край k нормальной поверхности. Решение этой системы называется допустимым, если оно состоит из целых неотрицательных чисел. Для каждого допустимого решения системы нормальных уравнений легко проверить, реализует ли оно некоторую нормальную поверхность в разбиении $\Sigma(\Delta^n)$ (см. (1)).

Определение. Каждый набор (конечный) допустимых решений называется **фундаментальным**, если каждое допустимое решение системы является линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами этого набора и никакое решение набора не является суммой допустимых решений, отличных от нулевого решения.

Для нахождения фундаментального набора решений достаточно решить соответствующую задачу целочисленного линейного программирования.

Лемма 2. *Существует примитивно рекурсивная $\varphi(n)$, что все решения фундаментального набора содержатся в кубе $0 \leq x_j \leq \varphi(n)$, $j=1, 2, \dots, f_1(n)$.*

Доказательство леммы фактически содержится в ⁽²⁾. Более точно можно показать, что ребро куба $\varphi(n)$ допускает экспоненциальную оценку $\varphi(n) \leq 2^{c f_1(n)}$, где c — постоянная, не зависящая от n .

Проверим каждое решение, содержащееся в кубе $0 \leq x_j \leq \varphi(n)$, $j=1, 2, \dots, f_1(n)$, на реализуемость, т. е. найдем все нормальные поверхности, отвечающие решениям системы нормальных уравнений и удовлетворяющие условиям $0 \leq x_j \leq \varphi(n)$, $j=1, 2, \dots, f_1(n)$.

Тогда, согласно работе ⁽²⁾, этот набор нормальных поверхностей содержит все поверхности минимального рода с точностью до несущественной изотопии. Поэтому для определения рода узла k , поданного на вход алгоритма, достаточно вычислить эйлерову характеристику каждой нормальной поверхности, содержащейся в найденном выше наборе.

Пусть n — номер разбиения S^3 , которому принадлежит узел k , заданный на двумерной сфере начального разбиения. Основные этапы работы алгоритма:

а) строится нормальное разбиение $\Sigma(\Delta^n)$ и нумеруются все типы сечений и типы дуг;

б) вычисляются матрицы $A(n)$ и $B(n)$;

в) находится конечный набор реализуемых решений системы нормальных уравнений, описанный выше;

г) вычисляется род для каждой нормальной поверхности, содержащейся в наборе, и находится среди них минимальный.

Из лемм 1 и 2 и результатов работы ⁽¹⁾ или ⁽²⁾ можно вывести, что верна следующая

Теорема. *Алгоритм Хакена примитивно рекурсивен.*

В настоящее время в работе ⁽⁴⁾ предъявлен алгоритм распознавания стандартной трехмерной сферы S^3 в классе всех трехмерных многообразий. Более точно этот алгоритм частично обоснован теоретически и проверен экспериментально на ЭВМ для некоторого класса трехмерных многообразий. Там же указана редукция проблемы распознавания тривиального узла в S^3 к проблеме распознавания трехмерной сферы.

Этот алгоритм примитивно рекурсивный и допускает оценку числа операций $l_1(m) \sim m^3$, где m — число самопересечений узла, заданного на двумерной сфере S^2 начального разбиения Δ .

Сравним алгоритм Хакена с алгоритмом в работе ⁽⁴⁾, вычислив оценку функций $l_0(n)$ и $l_1(n)$ количества операций от номера измельчения n начального разбиения. Так как число самопересечений не превосходит количества вершин разбиения Δ^n сферы S^2 , а последнее растет экспоненциально, то $l_1(n) \sim 2^{cn}$, c — постоянная, не зависящая от n , в то время как для алгоритма Хакена функция $l_0(n)$ допускает оценку $l_0(n) \geq 2^{2cn}$.

Автор благодарен А. Т. Фоменко, А. Семенову, М. Фрумкину за полезные советы и замечания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
9 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ W. Haken, Acta Math., v. 105, 245 (1961). ² H. Schubert, Math. Zs., v. 76, 2, 116 (1961). ³ А. И. Малецев, Алгоритмы и рекурсивные функции, «Наука», 1965.
⁴ И. А. Володин, В. Е. Кузнецов, А. Т. Фоменко, УМН, т. 29, в. 5 (1974).