

И. Г. ЖУРБЕНКО

ОЦЕНКИ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ СЛОЖНЫХ ГИПОТЕЗ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 X 1975)

Статистические критерии проверки сложных гипотез в присутствии мешающего параметра θ , или $C(\alpha)$ -критерии, определены Дж. Нейманом в работе ⁽¹⁾. В этой работе доказано, что эти критерии являются локально по основному параметру ξ , асимптотически по числу наблюдений n оптимальными. Этот результат получил дальнейшее развитие в работах ^(2, 3). Асимптотическая функция мощности $C(\alpha)$ -критериев вычисляется в работе ⁽⁴⁾ после двойного перехода к пределу по $n \rightarrow \infty$ и $\xi_n \rightarrow 0$ таким образом, что $\xi_n \sqrt{n} = \tau$. В противоположность этому в большинстве практических задач, широко обсуждаемых в работах ^(4, 5), необходима информация о функции мощности при заданных n и ξ . Оценки для функции мощности $\beta_n(\xi, \theta)$, использующие вероятности больших отклонений распределения выборочной оценки $\hat{\theta}_n$ мешающего параметра θ , получены в работе ⁽⁶⁾. В этой же работе приводятся оценки функции мощности критериев проверки сложных гипотез, позволяющие в отдельных случаях получать экспоненциальные скорости сходимости по числу наблюдений n при фиксированном $\xi > 0$. Такие оценки основаны на использовании информации о характере распределения выборочной оценки $\hat{\theta}_n$ мешающего параметра θ и характере распределения функции критерия $f(X, \theta)$. Однако для большинства реальных ситуаций знание оценок «хвостов» распределения оценки $\hat{\theta}_n$ затруднительно.

Настоящая работа посвящена отысканию оценок функции мощности критериев проверки сложных гипотез в предположении разложимости оценок $\hat{\theta}_n$ мешающего параметра θ согласно равенству (2). Существование аналогичных разложений для оценок максимального правдоподобия доказано в работе ⁽⁷⁾. Явный вид полученных выражений оценок $\beta_n(\xi, \theta)$ позволяет находить в конкретных случаях численные оценки функции мощности. Приведенные в работе неравенства для функции мощности $\beta_n(\xi, \theta)$ позволяют, в частности, переходя в неравенствах к пределу, получить асимптотический результат работы ⁽¹⁾. Приведенные в работе результаты справедливы не только для $C(\alpha)$ -критериев, но и для любых других критериев проверки сложных гипотез, задаваемых функцией критерия $f(X, \theta)$, удовлетворяющей перечисленным ниже свойствам.

Рассмотрим выборку независимых случайных величин $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ с плотностью распределения $p(x/\xi, \theta)$, зависящей от двух действительных параметров ξ, θ . Для любой функции $h(x)$ положим *

$$m_h = m_h(h(X)/\xi, \theta) = \int h(x) p(x/\xi, \theta) dx,$$

$$\sigma^2 h = \sigma^2(h(X)/\xi, \theta) = \int (h(x) - m_h)^2 p(x/\xi, \theta).$$

* Здесь и далее X есть любая из величин X_k .

Проверяется гипотеза $H: \xi=0$ при альтернативе $\bar{H}: \xi>0$, параметр θ принадлежит некоторой области U . $C(\alpha)$ -критерий определяется двумя элементами: областью $S(\alpha)$ отрицания гипотезы по заранее выбранному уровню значимости α и функцией критерия $f(X, \theta)$. Согласно работе ⁽¹⁾,

$$f(X, \theta) = \varphi_{\xi}(X, \theta) - a\varphi_{\theta}(X, \theta), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(x, \theta) &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \ln p(x/\xi, \theta) \right]_{\xi=0}, \\ \varphi_{\theta}(x, \theta) &= \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x/\xi, \theta) \right]_{\xi=0}, \\ a &= a(\theta) = \frac{\text{cov}(\varphi_{\xi}(X, \theta), \varphi_{\theta}(X, \theta)/0, \theta)}{\sigma^2(\varphi_{\theta}(X, \theta)/0, \theta)}. \end{aligned}$$

В таком случае статистикой $C(\alpha)$ -критерия будет

$$Z_n(\hat{\theta}_n) = (\sqrt{n}\sigma(f(X, \hat{\theta}_n)/\theta, \hat{\theta}_n))^{-1} \sum_{i=1}^n f(X_i, \hat{\theta}_n).$$

В качестве области S_{α} по заранее выбранному уровню значимости α выбирается интервал (v_{α}, ∞) , где v_{α} такое, что $1 - \Phi(v_{\alpha}) = \alpha$, $\Phi(x)$ — функция распределения нормальной случайной величины с единичной дисперсией и нулевым математическим ожиданием. Функция мощности, как вероятность

$$\beta_n(\xi, \theta) = P[Z_n(\hat{\theta}_n) > v_{\alpha}/\xi, \theta],$$

имеет предел $\beta^*(\tau, \theta)$ при $n \rightarrow \infty$, $\xi \rightarrow 0$ таких, что $\xi \sqrt{n} = \tau$, равный

$$\beta^*(\tau, \theta) = 1 - \Phi(v_{\alpha} - \mu\tau), \quad (2)$$

где

$$\mu = \mu(\theta) = \sigma[(\varphi_{\xi}(X, \theta) - a\varphi_{\theta}(X, \theta))/0, \theta].$$

Этот асимптотический результат получен в работе ⁽¹⁾ за счет использования некоторых ограничений на функцию плотности $p(x/\xi, \theta)$ и на скорость сходимости оценки $\hat{\theta}_n$ мешающего параметра θ , а именно предполагалось, что существует некоторая функция $H(\xi)$, $H(\xi) = A\xi + o(\xi)$, такая, что случайная величина

$$|\hat{\theta}_n - \theta - H(\xi)| \sqrt{n}$$

ограничена по вероятности равномерно по всем n . Оценка $\hat{\theta}_n$ была названа локально $\sqrt{n}$ -состоятельной оценкой параметра θ .

В настоящей работе даются неравенства, оценивающие функцию мощности $\beta_n(\xi, \theta)$ при каждом n сверху и снизу. Относительно выборочной оценки $\hat{\theta}_n$ делается следующее допущение:

$$\hat{\theta}_n = \theta_n^*(\xi, \theta) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i/\xi, \theta) + \frac{R_n(\bar{X}/\xi, \theta)}{n}, \quad (3)$$

где случайные величины $g(X) = g(X/\xi, \theta)$ имеют первые четыре момента, причем их математическое ожидание равно нулю. В полученных неравенствах будет употребляться величина

$$r^2(\xi) = \sup_{\theta \in U} M(R_n^2(X/\xi, \theta)/\xi, \theta).$$

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\theta^* &= \theta_n^*(\xi, \theta), \\ \gamma_1 &= \gamma_1(\xi, \theta) = M(f(X, \theta^*)/\xi, \theta), \\ \gamma_2 &= \gamma_2(\xi, \theta) = M(f'_\theta(X, \theta^*)/\xi, \theta), \\ m_2(\xi) &= \sup_{\theta \in U} M((f''_{\theta\theta}(X, \theta))^2/\xi, \theta), \\ \sigma(\xi) &= \sup_{\theta \in U} \sigma_{\theta\theta}''(f(X, \theta)/\xi, \theta).\end{aligned}$$

Ниже приводятся две теоремы, верные для любой функции $f(X, \theta)$, для которой все употребляемые в этих теоремах выражения имеют смысл, в частности, $f(X, \theta)$ может быть выбрана согласно равенству (1).

Т е о р е м а 1. Пусть выполнено условие (3); тогда при любом $\xi \geq 0$, $\delta > 0$ и любых $f(x, \theta)$, $p(x/\xi, \theta)$, для которых имеют смысл все использованные ниже выражения, справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\Phi \left(\frac{(v_\alpha - 9\delta) \sigma f(X, \theta^*) - \sqrt{n} \gamma_1}{\sigma \tilde{f}(X, \theta^*)} \right) - \frac{C m_3 |\tilde{f}(X, \theta^*)|}{\sqrt{n} \sigma^3 \tilde{f}(X, \theta^*)} - \frac{P_n}{\sigma f(X, \theta^*)} \leq \\ \leq 1 - \beta_n(\xi, \theta) \leq \Phi \left(\frac{(v_\alpha + 9\delta) \sigma f(X, \theta^*) - \sqrt{n} \gamma_1}{\sigma \tilde{f}(X, \theta^*)} \right) + \\ + \frac{P_n}{\sigma f(X, \theta^*)} + \frac{C m_3 |\tilde{f}(X, \theta^*)|}{\sqrt{n} \sigma^3 \tilde{f}(X, \theta^*)},\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$\tilde{f}(X, \theta^*) = f(X, \theta^*) - \gamma_1 + g(X) (\gamma_2 - n^{-1/2} v_\alpha \sigma'_\theta f(X, \theta^*)),$$

C — абсолютная константа Берри — Эссена и

$$\begin{aligned}P_n = \frac{1}{\sqrt{n} \delta} \left[\sigma g(X) \sigma f'_\theta(X, \theta^*) + r(\xi) m_2(\xi) + \delta m_2(\xi) + \right. \\ \left. + \delta \sigma^2 g(X) + 3 \sigma^2 g(X) \sqrt{m_2(\xi) \left(1 + \frac{m_4 g(X)}{n \sigma^4 g(X)} \right)} \right] + \\ + \frac{1}{n \delta} \left[r(\xi) \sigma f'(X, \theta^*) + \frac{r^2(\xi)}{2} \right] + \\ + \frac{v_\alpha}{n^{3/2} \delta} \left[\frac{1}{2} \sigma(\xi) \sigma^2 g(X) + r(\xi) \sigma(\xi) \sigma g(X) \right] + \\ + \frac{v_\alpha r^2(\xi)}{n^{5/2} \delta^2} \left[9 v_\alpha \sigma'_\theta f(X, \theta^*) + \frac{\delta \sigma(\xi)}{2} \right].\end{aligned}$$

Теорема 1 дает неравенства для функции мощности $\beta_n(\xi, \theta)$, которыми легко можно воспользоваться в конкретных случаях для вычислений верхней и нижней оценок функции мощности. Переходя в неравенстве (4) к пределу по $n \rightarrow \infty$ и $\delta = \delta_n \rightarrow 0$, полагая $\sqrt{n} \xi = \tau$, нетрудно получить основной результат (2) работы (1). При этом нужно воспользоваться соотношениями

$$\begin{aligned}\gamma_1(\xi, \theta) &= \mu \xi + o(\xi), \\ \gamma_2(\xi, \theta) &= \mu_2 \xi + o(\xi),\end{aligned}\quad (5)$$

доказанными в работе (1) для случая функции $f(x, \theta)$, найденной по формуле (1) с использованием некоторых широких условий на функцию

$p(x/\xi, \theta)$. Кроме того для доказательства этого факта нам нужно предположить асимптотическую несмещенность оценки $\hat{\theta}_n$ в условиях гипотезы H , а именно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n^*(0, \theta) = \theta. \quad (6)$$

Этим самым для произвольного выбора функции $f(x, \theta)$ с указанными свойствами (5) будет доказана следующая

Т е о р е м а 2. Пусть для функций $p(x/\xi, \theta)$ и $f(x, \theta)$ имеют смысл все выражения неравенства (4) и, кроме того, справедливы равенства (3), (5), (6).

Тогда существует предел $\beta^*(\tau, \theta)$ функции $\beta_n(\xi, \theta)$ при $n \rightarrow \infty$ и $\xi\sqrt{n} = \tau$, вычисляемый по формуле (2).

Автор выражает искреннюю признательность акад. А. Н. Колмогорову за большое внимание к данной работе.

Межфакультетская лаборатория статистических методов
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. Neyman, Probability and Statistics (the Harald Cramer volume), Almquist and Wiksells, Uppsala, N. Y., 1959, p. 213.
- ² А. А. Боровков, Теория вероятн. и ее приложения, т. 20, 3, 463 (1975).
- ³ D. M. Chibison, Proc. VI Berkeley Symp. Math. Statist. and Prob., v. 1, 1972, p. 153.
- ⁴ J. Neyman, E. Scott, Bull. Inst. Int. Statist., Proc. of the XXXV Session, 1967, p. 41, 477.
- ⁵ Ю. Ч. Нейман, Изв. АН УзССР, Сер. физ.-матем. наук, № 1, 15 (1974).
- ⁶ A. C. Singh, I. G. Zhurbenko, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., v. 72, 2, 577 (1975).
- ⁷ Ю. В. Линник, Н. М. Митрофанова, ДАН, т. 149, 518 (1963).