

УДК 513.88

МАТЕМАТИКА

В. И. СОБОЛЕВ, В. М. ЩЕРБИН

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ОТОБРАЖЕНИЙ K -ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 11 VI 1975)

Пусть X и Y — K -пространства, т. е. условно полные векторные структуры, и f — отображение X в Y . Будем предполагать, что в X и Y определены лишь сходимости последовательностей, порожденные полуупорядочением, и рассматривать отображения, непрерывные в смысле таких сходимостей. Наделение пространств X и Y какими-либо топологиями не предполагается и поэтому следующие ниже результаты не вытекают из общей теории дифференцирования отображений линейных топологических пространств ^(1, 2, 3).

1. Пусть $f_1, f_2: X \rightarrow Y$, X^+ , Y^+ — соответствующие множества неотрицательных элементов. Для любого $\varepsilon > 0$ и элементов $a \in X$, $u \in X^+$ рассмотрим множество

$$P_\varepsilon(a, u) = \{x \in X, |x - a| \leq \varepsilon u\}.$$

Положим

$$p_\varepsilon(a, u) = \sup_{x \in P_\varepsilon(a, u)} |f_1(x) - f_2(x)|,$$

предполагая, что этот супремум существует. В дальнейшем для фиксированных a и u введем обозначения

$$P(\varepsilon) = P_\varepsilon(a, u), \quad p(\varepsilon) = p_\varepsilon(a, u).$$

Определение 1. Если из $|x_n - a| \leq \varepsilon_n u$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, следует

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leq \eta_n v, \quad v \in Y^+, \quad \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} (\eta_n / \varepsilon_n) = 0,$$

то будем говорить, что отображение f_1 (u, v)-касается отображения f_2 в точке $x = a$.

Определение (u, v)-касания функции f_1 и f_2 будем сокращенно записывать в виде

$$|f_1(x) - f_2(x)| = o(\varepsilon), \quad x \in P(\varepsilon), \quad (1)$$

или

$$r\text{-}\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \frac{p(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 0, \quad (2)$$

где $r\text{-}\lim$ означает сходимость с регулятором или относительно равномерную сходимость *.

Если отображение f_1 (u, v)-касается отображения f_2 в точке a , то из определения 1 следует, что отображение $(f_1 - f_2)$ в этой точке r -непрерывно и равно нулю.

Замечание. В дальнейшем, если не будет сделано оговорки, мы будем понимать непрерывность в смысле r -сходимости.

Определение 2. Отображение f называется (u, v)-дифференцируемым в точке a , если существует такое линейное регулярное отображение $g: X \rightarrow Y$, что отображения $x \mapsto f(x) - f(a)$ и $x \mapsto g(x - a)$ (u, v)-касаются в точке a , т. е. $|f_1(x) - f(a) - g(x - a)| = o(\varepsilon)$ для $x \in P(\varepsilon)$.

* Относительно терминологии K -пространств см. (3).

Отображение g в этом случае называется (u, v) -производной отображения f в точке a и обозначается $f'(a)$. Эту производную будем называть также относительно равномерной производной. Таким образом, для $f'(a)$ имеем

$$|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| = o(\varepsilon), \quad x \in P(\varepsilon). \quad (3)$$

Определение 3. Отображение f называется (u, v) -дифференцируемым на множестве $\Omega \subset X$, если оно дифференцируемо в каждой точке $a \in \Omega$.

Заметим, что (u, v) -производная $f'(a)$ действует из X_u в Y . По определению положим $f'(a) = 0$ на X_n^d . Нетрудно показать, что (u, v) -производная $f'(a)$ определяется однозначно.

Примеры. 1) Если $X = Y = \mathbf{R}$ и $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, то (u, v) -производная совпадает с обычной производной вещественной функции вещественной переменной.

2) Если отображение $f: X \rightarrow Y$ постоянное, то оно (u, v) -дифференцируемо при любых u и v , причем $f'(x) = 0$.

3) Если f — линейное регулярное отображение X в Y и регулятор u таков, что X_u^d содержится в ядре f , то f (u, v) -дифференцируемо при любом v и $f'(x) = f$.

Предложение 1. Отображения f , (u, v) -дифференцируемые в точке a (на множестве Ω), образуют векторное пространство.

Легко видеть, что если отображение f (u, v) -дифференцируемо в точке a , то оно $(\alpha u, \beta v)$ -дифференцируемо в этой точке при любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ и нетрудно доказать его (u', v') -дифференцируемость в a при $u' < u$ и $v' < v$.

2. Положим $M_{a, u} = a + \langle -u, u \rangle$, где $\langle -u, u \rangle$ — порядковый интервал, состоящий из точек $x \in X$ таких, что $|x| \leq u$.

Предложение 2. Пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ (u_i, v) -дифференцируемо, $i = 1, 2, \dots$, на множестве $M_{a, u}$ и пусть, кроме того, выполняются условия:

1) равномерно по $i = 1, 2, \dots$

$$\sup_{x \in M_{a, u}} |f'_i(a + x) - f'_i(a)| = o(\varepsilon)$$

при $|x - a| \leq \varepsilon u$, где $f'_i(x) = (u_i, v)$ -производная на $M_{a, u}$;

2) $|\varphi_i(x - a)| \leq \varepsilon A(x - a)$, где $\varphi_i(x - a) = f(x) - f(a) - f'_i(a)(x - a)$ и A — линейный положительный оператор, не зависящий от i и $x \in M_{a, u}$.

Тогда при $u = \sup u_i$ отображение f (u, v) -дифференцируемо в точке a с некоторым регулятором сходимости w .

Теорема 1. Если отображение $f: X \rightarrow Y$ (u, v) -дифференцируемо в точке a и отображение $g: Y \rightarrow Z$ (u', v) -дифференцируемо в точке $b = f(a)$, где $u' \geq |f'(a)|u + v$, то отображение $h = g \circ f: X \rightarrow Z$ (u, w) -дифференцируемо в точке a , где $w \geq |g'(b)|v + v'$. При этом $h'(a) = g'(b) \circ f'(a)$.

Теорема 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм, (u, v) -дифференцируемый в точке a . Для того чтобы отображение $g = f^{-1}: Y \rightarrow X$ было (w, u) -дифференцируемо в точке $b = f(a)$, достаточно, чтобы $f'(a) \in \text{Isom}(X, Y)$ и $||f'(a)|^{-1}|w \leq u$. При этом $g'(b) = [f'(a)]^{-1}$.

Определение производной, принятое в этой заметке, отличается от определения производной по Фреше. Именно, во многих случаях производная в смысле Фреше не существует, но существует производная, определенная в нашем смысле. Это утверждение проиллюстрируем на примерах.

Примеры. 4) Пусть $f: l_2 \rightarrow l_2$ определено следующим образом:

$$f(te_i) = t^{1+\alpha_i}e_i, \quad \alpha_i > 0, \quad \alpha_i \rightarrow 0, \quad e_i - \text{орт}, \\ f(x) = 0 \quad \text{для остальных } x \in b_2.$$

Это отображение не будет дифференцируемо в нуле по Фреше ⁽²⁾, но будет (u, v) -дифференцируемо в точке $x = 0$ в нашем смысле при $v \geq u$.

5) Пусть $X = \mathcal{L}_2(0, \pi)$ с естественной упорядоченностью. Отображение $f: \mathcal{L}_2(0, \pi) \rightarrow \mathbf{R}$, определенное равенством

$$f(x) = \int_0^{\pi} \sin x(t) dt,$$

не является дифференцируемым по Фреше ни в одной точке ⁽⁴⁾, но всюду (u, v) -дифференцируемо, где u — ограниченная измеримая функция.

6) Пусть $X = Y = \mathcal{L}_2(a, b)$ с естественной упорядоченностью, и $A: X \rightarrow Y$ задается формулой

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s)g(s, x(s))ds,$$

причем выполняются следующие условия:

- а) $K(t, s)$ непрерывна в квадрате $a \leq t, s \leq b$;
- б) $g(s, t)$ непрерывна в полосе $[a, b] \times (-\infty, \infty)$;
- в) $g'_\tau(s, t)$ непрерывна в полосе $[a, c] \times (-\infty, \infty)$,
- $a < c < b$ и по переменному τ удовлетворяет условию Липшица;
- г) $g'_\tau(s, \tau) = 0$ для $s \in (c, b]$, $-\infty < \tau < 0$, $\lim_{\tau \rightarrow +0} g'_\tau(s, \tau) \geq 1$ для $s \in (c, b]$.

Тогда нетрудно видеть, что отображение A не будет дифференцируемо по Фреше в точке $x(s) \equiv 0$, но будет (u, v) -дифференцируемо, если $u(t) \equiv 0$ на промежутке $(c, b]$.

Заметим, наконец, что, варьируя регуляторы сходимости u и v , мы можем сделать дифференцируемые в нашем смысле отображения недифференцируемыми и наоборот.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
27 V 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, УМН, т. 22, в. 6, 201 (1967). ² В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, УМН, т. 23, в. 4, 67 (1968). ³ Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, 1961. ⁴ М. Сова, Чех. матем. журн., т. 16, 339 (1966). ⁵ А. Фрелихер, В. Бухер, Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы, М., «Мир», 1970.