

В. Я. ИВРИЙ

ВОЛНОВЫЕ ФРОНТЫ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И КОНИЧЕСКАЯ РЕФРАКЦИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 30 IX 1975)

В настоящей заметке изучается распространение WF (волновых фронтов) решений некоторых гиперболических псевдодифференциальных уравнений с характеристиками переменной кратности. Для изучаемых операторов может иметь место коническая рефракция, т. е. явление, когда отдельные точки WF начальных данных «расползаются» в целое многообразие. Для операторов с постоянными коэффициентами этот эффект был изучен в (1, 2).

1. Обозначения: $x = (x_0, x') = (x_0, \dots, x_l) \in X = R^{l+1}$, $\xi = (\xi_0, \xi') = (\xi_0, \dots, \xi_l)$ — двойственные переменные; $\langle x, \xi \rangle = x_0 \xi_0 + \dots + x_l \xi_l$; T^*X — кокасательное расслоение, $T^*X \setminus 0 = \{(x, \xi) \in T^*X, \xi \neq 0\}$, $\dot{T}^*X = \{(x, \xi) \in T^*X, \xi' \neq 0\}$. Если $z = (x, \xi)$, $z' = (y, \eta)$, то $\sigma(z, z') = \langle x, \eta \rangle - \langle y, \xi \rangle$.

Через $L^m(X)$, $L^m(R^l)$ обозначим пространства классических псевдодифференциальных операторов порядка m с компактными носителями, $L^{m'}(X) = C^\infty(R^l, L^m(R^l))$ (3).

Если $u \in \mathcal{D}'(X)$, то $WF(u)$ называется следующее подмножество $T^*X \setminus 0$: $z \notin WF(u)$, если существует $a \in L^0(X)$, $a_0(z) \neq 0$, $au \in C^\infty(X)$ (4-6).

2. Будем изучать оператор

$$P = -\Delta M + Q = -(D_0 - \lambda)(D_0 - \mu) + Q,$$

где $\lambda, \mu \in L^{1'}(X)$, $Q \in L^{2'}(X)$, причем

(H) $\lambda_1(x, \xi')$, $\mu_1(x, \xi')$ вещественны, $Q_2(x, \xi') \geq 0$,

(H_∞) при $|x| \geq R$ $\lambda_1(x, \xi') = \mu_1(x, \xi') = 0$, $Q_2(x, \xi') = |\xi'|^2$ (это требование на бесконечности сделано лишь для удобства).

Введем множества $\text{Char } P = \{(x, \xi) \in \dot{T}^*X, P_2(x, \xi) = 0\}$, $\Sigma = \{(x, \xi) \in \dot{T}^*X, \nabla P_2(x, \xi) = P_2(x, \xi) = 0\} = \{(x, \xi) \in \dot{T}^*X, \Lambda_1(x, \xi) = M_1(x, \xi) = Q_2(x, \xi) = 0\}$, где $\nabla f(x, \xi) = \text{grad}_\xi, -x f(x, \xi)$.

В точках Σ введем фундаментальную матрицу P_2 (7, 8):

$$F(x, \xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 P_2}{\partial \xi \partial x} & \frac{\partial^2 P_2}{\partial \xi \partial \xi} \\ -\frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial x} & -\frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial \xi} \end{pmatrix} (x, \xi)$$

и субглавный символ P

$$P_1'(x, \xi) = P_1(x, \xi) + \frac{i}{2} \sum_{j=0}^l \frac{\partial^2 P_2(x, \xi)}{\partial x_j \partial \xi_j}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

(C1) $|\{\Lambda_1, Q_2\}(x, \xi')| \leq C Q_2(x, \xi')$;

(C2) $|\{\Lambda_1, M_1\}(x, \xi')| \leq C |(\Lambda_1 - M_1)(x, \xi')| + C Q_2^{1/2}(x, \xi')$,

где $\{ \}$ — скобки Пуассона;

(L1) на Σ

$$\text{Re } P_1'(x, \xi) > -\frac{1}{4} \sum_k |\omega_k(x, \xi)|;$$

где $\omega_k(x, \xi)$ — мнимые собственные числа $F(x, \xi)$;

(L2) существует $\theta(x, \xi') \in C^\infty(T^*X)$, положительно однородная степени 0 по ξ' , такая, что

$$|\operatorname{Im}(P_1' - 1/2 \{ \Lambda_1, M_1 \} - \theta M_1)(x, \xi)| \leq \\ \leq C Q_2^{1/2}(x, \xi') + C |\Lambda_1(x, \xi)|.$$

Из (7) следует, что если выполнены все условия (H)–(L2), исключая, быть может, (C2), то задача Коши с данными при $x_0 = T$ для $P \in C^\infty$ -корректна в обе стороны. С другой стороны, если P удовлетворяет (H)–(C2), то $F(x, \xi)$ не имеет вещественных отличных от 0 собственных чисел, и в силу (8) условия (L1), (L2) на младшие члены близки к необходимым.

Предложение 1. Пусть выполнены (H)–(C2). Тогда

(i) бихарактеристики P , лежащие в $\operatorname{Char} P|_\Sigma$, не имеют предельных точек из Σ ;

(ii) бихарактеристики Λ , пересекающие Σ , лежат в Σ .

Вне Σ P — оператор главного типа, для него WF распространяются вдоль бихарактеристик (5, 6); поэтому в силу предложения 1(i) нас должны интересовать лишь WF в пересечении с Σ .

Пусть $\Sigma' = \{(x, \xi) \in \Sigma, \operatorname{Ker} F^2(x, \xi) \cap \operatorname{Im} F^2(x, \xi) = 0\}$; в точках Σ' введем проекторы $\pi(x, \xi)$ ($I - \pi(x, \xi)$) на $\operatorname{Ker} F^2(x, \xi)$, $\operatorname{Im} F^2(x, \xi)$ соответственно.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (H)–(L2). Пусть $\varphi(x, \xi) \in C^\infty(T^*X)$ положительно однородна степени 0 по ξ . Предположим, что если $(x, \xi) \in \Sigma$, $\varphi(x, \xi) = 0$, то $\{\Lambda_1, \varphi\}(x, \xi) > 0$, и если $(x, \xi) \in \Sigma'$, $\varphi(x, \xi) = 0$, то

$$\sigma(F\pi\nabla\varphi, \pi\nabla\varphi)(x, \xi) < 0.$$

Тогда, если $u \in \mathcal{D}'(X)$,

$$\operatorname{WF}(u) \cap \Sigma \cap \{\varphi(x, \xi) < 0\} \cap \{x_0 = T_-\} = \emptyset, \\ \operatorname{WF}(Pu) \cap \Sigma \cap \{\varphi(x, \xi) < 0\} \cap \{T_- \leq x_0 \leq T_+\} = \emptyset,$$

то

$$\operatorname{WF}(u) \cap \Sigma \cap \{\varphi(x, \xi) < 0\} \cap \{T_- \leq x_0 \leq T_+\} = \emptyset.$$

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть выполнены условия (H)–(L2). Предположим, что в каждой точке $(x, \xi) \in \Sigma'$ $\dim(F(x, \xi)\pi(x, \xi)L(\xi)) = 1$, где $L(\xi) = \{z \in \mathbb{R}^{2l+2}, \sigma(z, (0, \xi)) = 0\}$. Тогда

(i) $\operatorname{WF}(u) \cap \Sigma$ инвариантен относительно переноса вдоль не пересекающихся с $\operatorname{WF}(Pu)$ отрезков бихарактеристик Λ ;

(ii) если $\Sigma \supset \gamma$ — бихарактеристика Λ , то существует $u \in \mathcal{D}'(X)$ такая, что $Pu \in O^\infty(X)$, $\operatorname{WF}(u) = \gamma$.

Замечание. Условия и утверждения теорем 1, 2 в действительности не зависят от удовлетворяющего (H)–(C2) разложения оператора P .

Пример. Оператор с главным символом

$$P_2(x, \xi) = -\xi_0(\xi_0 - \xi_1) + x_1^2 |\xi'|^2$$

удовлетворяет условиям теоремы 2 при подходящих младших членах. При этом $\Sigma = \{x_1 = \xi_0 = \xi_1 = 0, \xi' \neq 0\}$, $\Lambda_1(x, \xi) = \xi_0$.

4. Таким образом, коническая рефракция может быть лишь если $\Sigma' \neq \emptyset$. Простейшие примеры операторов, допускающих коническую рефракцию, — многие операторы с постоянными символами и операторы, включающие производные лишь по части переменных. Приведем более сложный

Пример. Оператор с главным символом

$$P_2(x, \xi) = -\xi_0 \left(\xi_0 - \sum_{j=1}^p (\mu_j x_j \xi_l + \nu_j \xi_j) \right) + \\ + \sum_{j=1}^p \alpha_j^2 (\xi_j^2 + x_j^2 \lambda(\xi)) + \sum_{j=p+1}^{p+q} \xi_j^2,$$

где $\alpha_j > 0$, $p > 0$, $q \geq 0$, $p+q < l$, $\lambda(\xi) = \sum_{j=p+q+1}^l \xi_j^2$, удовлетворяет условиям

(Н) — (L2) при подходящих младших членах. При этом $\Sigma = \Sigma' = \{x_1 = \dots = x_p = \xi_0 = \dots = \xi_{p+q} = 0, \lambda(\xi) > 0\}$, $\Lambda_1(x, \xi) = \xi_0$.

Пусть $\mathcal{M}$ — множество содержащихся в Σ прямых вида

$$\gamma = \{(x, \xi), \xi = \bar{\xi}, x' = \bar{x}' + \bar{v}x_0\},$$

где $(\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v}) = \text{const}$, $\bar{v} = (0, \dots, 0, \bar{v}_{p+1}, \dots, \bar{v}_{p+q}, 0, \dots, 0)$, причем

$$|\bar{v}|^2 \leq \left[1 + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^p \frac{1}{\alpha_j^2} (\mu_j^2 \bar{\xi}_i^2 \lambda^{-1}(\bar{\xi}) + v_j^2) \right]^{-1}.$$

Для точек $(x, \xi) \in \Sigma$ введем конусы

$$\Gamma(x, \xi) = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{M}, (x, \xi) \in \gamma} \gamma, \quad \Gamma_{\pm}(x, \xi) = \{(y, \eta) \in \Gamma(x, \xi), \pm y_0 \geq \pm x_0\}.$$

Теорема 3. Пусть P — описанный выше оператор. Тогда

(i) для любой $\gamma \in \mathcal{M}$ существует $u \in \mathcal{D}'(X)$ такая, что

$$Pu \in C^\infty(X), \quad WF(u) = \gamma \times R^+ = \{(x, \lambda \xi), (x, \xi) \in \gamma, \lambda \in R^+, \lambda > 0\}.$$

(ii) для любой $u \in \mathcal{D}'(X)$

$$WF(u) \cap \Sigma \cap \{T_- \leq x_0 \leq T_+\} \subset \bigcup_{z \in WF(Pu) \cap \Sigma \cap \{T_- \leq x_0 \leq T_+\}} \Gamma_+(z) \cup \bigcup_{z \in WF(u) \cap \Sigma \cap \{T_- = x_0\}} \Gamma_+(z).$$

Магнитогорский
горно-металлургический институт
им. Г. И. Носова

Поступило
28 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Курант, Уравнения с частными производными, М., «Мир», 1964. ² D. Ludwig, B. Granoff, J. Math. Anal. Appl., v. 21, № 3, 556 (1968). ³ Л. Хермандер, В сб.: Псевдодифференциальные операторы, М., «Мир», 1967, стр. 63. ⁴ L. Hörmander, Acta math., v. 127, № 1/2, 79 (1971). ⁵ J. J. Duistermaat, L. Hörmander, Acta math., v. 128, № 3/4, 183 (1972). ⁶ Л. Хермандер, УМН, т. 28, 6, 106 (1973). ⁷ В. Я. Иеруй, Тр. Московск. матем. общ., т. 34 (1976). ⁸ В. Я. Иеруй, В. М. Петков, УМН, т. 29, 5, 3 (1974).