

УДК 513.831

МАТЕМАТИКА

А. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ

ТЕОРЕМЫ О МОЩНОСТИ СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ В БИКОМПАКТАХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 8 X 1975)

В статье особенно просто доказывается теорема о мощности бикомпакта с первой аксиомой счетности и дается два новых ее обобщения. Обозначения такие же, как в (3).

Пусть $\mathcal{E}$ — семейство упорядоченных пар множеств, $p' = (A', B') \in \mathcal{E}$ и $p'' = (A'', B'') \in \mathcal{E}$. Полагаем $p' < p''$, если $A' \subset A''$, $B' \subset B''$ и $A' \cap B' \neq \Lambda$. Отношение $<$ называется косым порядком на $\mathcal{E}$.

Теорема 1 (1). Если X хаусдорфово финально-компактное пространство и $\chi(x, X) \leq \aleph_0$, для всех $x \in X$, то $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.

Доказательство. Положим $\mathcal{F} = \{Y \subset X : Y \text{ замкнуто в } X\}$ и $\mathcal{F}_c = \{Y \in \mathcal{F} : |Y| \leq 2^{\aleph_0}\}$. Для каждого $F \in \mathcal{F}_c$ $\chi(F, X) \leq 2^{\aleph_0}$, и мы фиксируем $\gamma_F \in \mathcal{F}$ такое, что $|\gamma_F| \leq 2^{\aleph_0}$ и $\cup \gamma_F = X \setminus F$. Если $Y \subset X$ и $|Y| \leq 2^{\aleph_0}$, то и $|[Y]| \leq 2^{\aleph_0}$. Поэтому, если $\lambda \in \mathcal{F}_c$ и $|\lambda| \leq \aleph_0$, то $[\cup \lambda] \in \mathcal{F}_c$.

По трансфинитной индукции до $\aleph_1$ тривиально строится пара $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ непустых семейств множеств, такая что: 1) $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_c$; 2) $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$; 3) $|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| \leq 2^{\aleph_0}$; 4) если $\lambda \in \mathcal{A}$ и $|\lambda| \leq \aleph_0$, то $[\cup \lambda] \in \mathcal{A}$; 5) если $\gamma \in \mathcal{B}$ и $|\gamma| \leq \aleph_0$, то $\cap \gamma \in \mathcal{B}$; 6) если $A \in \mathcal{A}$, то $\gamma_A \in \mathcal{B}$ и 7) если $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ и $B \neq \Lambda$, то существует $A' \in \mathcal{A}$, для которого $A' \cap B \neq \Lambda$ и $A' \supset A$.

Покажем, что $\cup \mathcal{A} = X$. Предположим противное. Пусть $z \in X \setminus \cup \mathcal{A}$, $\mathcal{Q} = \{(A, B) : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, A \cap B = \Lambda \text{ и } B \ni z\}$ и $<$ — косой порядок на $\mathcal{Q}$. Если $\{(A_n, B_n) : n \in \mathbb{N}^+\}$ — любая последовательность в $\mathcal{Q}$, то существует $q \in \mathcal{Q}$, для которого $(A_n, B_n) < q$ при всех $n \in \mathbb{N}^+$. Действительно, $A^* = [\cup \{A_n : n \in \mathbb{N}^+\}] \in \mathcal{A}$, в силу 4), и $B^* = \cap \{B_n : n \in \mathbb{N}^+\} \in \mathcal{B}$, в силу 5). Существует (см. 7)) $A' \in \mathcal{A}$, для которого $A' \supset A^*$ и $A' \cap B^* \neq \Lambda$. Тогда и $A' \cap B_n \neq \Lambda$, при всех $n \in \mathbb{N}^+$. Далее, $z \notin A'$ (ибо $A' \subset \cup \mathcal{A} \subset X \setminus \{z\}$). Из $\gamma_{A'} \in \mathcal{B}$ (см. 6)) и $\cup \gamma_{A'} = X \setminus A' \ni z$ следует, что $z \in \bar{B}$ для некоторого $\bar{B} \in \gamma_{A'}$; $q = (A', B')$, где $B' = \bar{B} \cap B^*$, — искомое. Поэтому в $\mathcal{Q}$, $<$ существует строго возрастающая трансфинитная последовательность $\{q_\alpha = (A_\alpha, B_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ — типа ω_1 . Положим $A_\omega = \cup \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ и $B_{\omega_1} = \cap \{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Если $Y \subset A_{\omega_1}$ и Y счетно, то $Y \subset A_{\alpha'}$, для некоторого $\alpha' < \omega_1$, и потому $[Y] \subset A_{\alpha'} \subset A_{\omega_1}$. Но $t(X) \leq \chi(X) \leq \aleph_0$. Значит, A_{ω_1} замкнуто в X . Очевидно, $A_{\omega_1} \cap B_{\omega_1} = \Lambda$. Но $B_\alpha \cap A_{\alpha+1} \neq \Lambda$. Итак, $\{B_\alpha \cap A_{\omega_1} : \alpha < \omega_1\}$ — монотонная последовательность типа ω_1 непустых замкнутых множеств в X с пустым пересечением — в противоречие с финальной компактностью X . Значит, $X = \cup \mathcal{A}$ и $|X| \leq |\cup \mathcal{A}| \leq \leq 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Теорема 1 доказана.

Пусть τ и λ — бесконечные кардиналы, $(X, \mathcal{F})$ — пространство. $\mathcal{F} = \{Y \subset X : [Y] = Y\}$ и $A \subset X$. Скажем, что A (τ, λ) -вложено в X , если существует $\gamma_A \in \mathcal{F}$ такое, что $i_1) |\gamma_A| \leq \tau$; $i_2) \cup \gamma_A = X \setminus A$ и $i_3)$ если $\theta \in \mathcal{F}$, $|\theta| \leq \lambda$ и $(\cap \theta) \cap (X \setminus A) \neq \Lambda$, то и $(\cap \theta) \cap (\cup \gamma_A) \neq \Lambda$.

Если X нормально, $A \in \mathcal{F}$ и A (τ, λ) -вложено в X , то можно дополнительно потребовать, чтобы все элементы семейства γ_A были множествами типа G_δ в X .

Теорема 2. Пусть X — бикомпакт, τ и λ — бесконечные кардиналы, для которых $\tau^\lambda = \tau$, $t(X) \leq \lambda$, и $\mathcal{A}$ — покрытие пространства X замкнутыми

множествами такое, что: 2₁) каждое $A \in \mathcal{A}$ (τ, λ)-вложено в X ; 2₂) если $\gamma \subset \mathcal{A}$ и $|\gamma| \leq \lambda$, то существует $A \in \mathcal{A}$, для которого $\bigcup \gamma \subset A$.

Тогда существует $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}$, для которого $|\mathcal{A}^*| \leq \tau$ и $[\bigcup \mathcal{A}^*]^\lambda = X$ (тем более, $[\bigcup \mathcal{A}^*] = X$) (см. (3)).

Доказательство. По индукции до λ^+ тривиально строятся семейства $\mathcal{A}' \subset \mathcal{F}$ и $\mathcal{B}' \subset \mathcal{F}$ со свойствами: 2₃) $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$; 2₄) $|\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}'| \leq \tau$; 2₅) каждое $B \in \mathcal{B}'$ типа G_λ в X ; 2₆) если $\gamma \subset \mathcal{A}'$ и $|\gamma| \leq \lambda$, то $\bigcup \gamma \subset A$, для некоторого $A \in \mathcal{A}'$; 2₇) если $\mu \subset \mathcal{B}'$ и $|\mu| \leq \lambda$, то $\bigcap \mu \in \mathcal{B}'$; 2₈) если $A \in \mathcal{A}'$, $B \in \mathcal{B}'$ и $B \neq \Lambda$, то существует $A' \in \mathcal{A}'$, для которого $A' \supset A$ и $A' \cap B \neq \Lambda$; 2₉) если $A \in \mathcal{A}'$, то существует $\gamma \subset \mathcal{B}'$, для которого $\bigcup \gamma \subset X \setminus A$ и $[\bigcup \gamma]^\lambda \supset X \setminus A$.

Свойство 2₄) удается обеспечить благодаря предположению, что $\tau^\lambda = \tau$ (которое, в частности, влечет, что $\lambda^+ \leq \tau$).

Пусть Φ — непустой бикомпакт, лежащий в X , и $\chi(\Phi, X) \leq \lambda$. Покажем, что $(\bigcup \mathcal{A}') \cap \Phi \neq \Lambda$. Предположим противное, и рассмотрим семейство $\mathcal{P} = \{(A, B): A \in \mathcal{A}', B \in \mathcal{B}', A \cap B = \Lambda, B \cap \Phi \neq \Lambda\}$, наделенное косым порядком $<$. Очевидно, $\mathcal{P} \neq \Lambda$. Пусть $\mathcal{C}$ — цепь в $\mathcal{P}$, $<$ и $|\mathcal{C}| \leq \lambda$. Положим $\gamma_{\mathcal{C}}' = \{A: \text{существует } B, \text{ для которого } (A, B) \in \mathcal{C}\}$, $\gamma_{\mathcal{C}}'' = \{B: \text{существует } A, \text{ для которого } (A, B) \in \mathcal{C}\}$ и $B_{\mathcal{C}} = \bigcap \gamma_{\mathcal{C}}''$. Тогда $B_{\mathcal{C}} \neq \Lambda$, так как X — бикомпакт, и $B_{\mathcal{C}} \in \mathcal{B}'$ в силу 2₇). Из 2₆) и 2₈) следует теперь, что существует $A' \in \mathcal{A}'$, для которого $\bigcup \gamma_{\mathcal{C}}' \subset A'$ и $A' \cap B_{\mathcal{C}} \neq \Lambda$. Так как $\mathcal{C}$ — цепь замкнутых множеств, пересечение каждого из которых с бикомпактом Φ не пусто, то $\Phi_{\mathcal{C}} = \bigcap B_{\mathcal{C}} \cap \Phi \neq \Lambda$. Очевидно, $\Phi_{\mathcal{C}}$ — типа G_λ в X . Из $(\bigcup \mathcal{A}') \cap \Phi = \Lambda$ следует, что $A' \cap \Phi_{\mathcal{C}} = \Lambda$. В силу 2₉) существует $\gamma' \subset \mathcal{B}'$, для которого $\bigcup \gamma' \subset X \setminus A'$ и $\Phi_{\mathcal{C}} \cap (\bigcup \gamma') \neq \Lambda$. Зафиксируем $B' \in \gamma'$, для которого $B' \cap \Phi_{\mathcal{C}} \neq \Lambda$, и положим $B' = B' \cap B_{\mathcal{C}}$ и $p' = (A', B')$. Тогда $B' \in \mathcal{B}'$ и $B' \cap \Phi \supset B' \cap \Phi_{\mathcal{C}} \neq \Lambda$. Значит, $p' \in \mathcal{P}$. Ясно, что $(A, B) < (A', B')$, для всех $(A, B) \in \mathcal{C}$. Итак, если $\mathcal{C}$ — цепь в $\mathcal{P}$, $<$ и $|\mathcal{C}| \leq \lambda$, то существует $p' \in \mathcal{P}$, для которого $c < p'$, при всех $c \in \mathcal{C}$. Следовательно, существует в $\mathcal{P}$, $<$ возрастающая трансфинитная последовательность $\{(A_\alpha, B_\alpha): \alpha < \lambda^+\}$ типа λ^+ .

Положим $A_i = \bigcup \{A_\alpha: \alpha < \lambda^+\}$ и $B_i = \bigcap \{B_\alpha: \alpha < \lambda^+\}$. Очевидно, $A_i \cap B_i = \Lambda$. Из $(A_\alpha, B_\alpha) < (A_{\alpha+1}, B_{\alpha+1})$ следует, что $A_{\alpha+1} \cap B_\alpha \neq \Lambda$. Тем более, $B_\alpha \cap A_i \neq \Lambda$. Значит, $\xi = \{B_\alpha \cup A_i: \alpha < \lambda^+\}$ — цепь непустых замкнутых множеств в A_i . Но A_i замкнуто в X . Действительно, если $Y \subset A_i$ и $|Y| \leq \lambda$, то $Y \subset A_\alpha$, для некоторого $\alpha < \lambda^+$, и, значит, $[Y] \subset [A_\alpha] = A_\alpha \subset A_i$. Но $t(X) \leq \lambda$ влечет, что $[A_i] = \bigcup \{[Y]: Y \subset A_i \text{ и } |Y| \leq \lambda\}$. Значит, $[A_i] = A_i$. Поэтому A_i — бикомпакт, и $\bigcap \xi \neq \Lambda$ — противоречие с $\bigcap \xi \subset A_i \cap B_i = \Lambda$. Теорема 2 доказана.

Назовем бикомпакт X $\aleph_0$ -ажурным, если каждое счетное $A \subset X$ содержится в сепарабельном замкнутом подмножестве Y пространства X , которое $(2^{\aleph_0}, \aleph_0)$ -вложено в X .

Предложение 1. Каждый секвенциальный бикомпакт X такой, что $\chi(x, X) \leq 2^{\aleph_0}$, для всех $x \in X$, $\aleph_0$ -ажурен.

Предложение 2. Если X бикомпакт и $s(X) \leq \aleph_0$, то X $\aleph_0$ -ажурен (см. (5)).

Теорема 3. Если X — $\aleph_0$ -ажурный бикомпакт счетной тесноты, то существует семейство γ сепарабельных бикомпактов в X такое, что $|\gamma| \leq 2^{\aleph_0}$ и $[\bigcup \gamma]^{\aleph_0} = X$ (тем более, $[\bigcup \gamma] = X$) *.

Следствие 3.1. Плотность каждого $\aleph_0$ -ажурного бикомпакта счетной тесноты не превосходит $2^{\aleph_0}$ **.

Следствие 3.2. Если X — бикомпакт, $t(X) \leq \aleph_0$ и $\chi(F, X) \leq 2^{\aleph_0}$ для каждого сепарабельного замкнутого в X множества F , то плотность X не больше, чем $2^{\aleph_0}$.

Следствие 3.3. Если X — секвенциальный бикомпакт, то следующие условия равносильны: а) X — $\aleph_0$ -ажурен;

* Это прямо следует из теоремы 2: роль $\mathcal{A}$ играет класс всех сепарабельных бикомпактов, $(2^{\aleph_0}, \aleph_0)$ -вложенных в X , $\tau = 2^{\aleph_0}$ и $\lambda = \aleph_0$.

** Следствие 1 несколько обобщает результат Шапировского из (7).

б) $\chi(F, X) \leq 2^{\kappa_0}$, для каждого замкнутого в X множества F ; в) $|X| \leq 2^{\kappa_0}$.

Следствие 3,4. Если X — секвенциальный бикомпакт и $\chi(x, X) \leq 2^{\kappa_0}$, для всех $x \in X$, то $|X| \leq 2^{\kappa_0}$.

Теорема 4*. Пусть $(X, \mathcal{T})$ — регулярное пространство, τ — кардинал, λ — регулярный кардинал и γ — семейство замкнутых в X множеств, причем: 1) если $\lambda' < \lambda$, то $\tau^{\lambda'} = \tau$; 2) $\chi(F, X) < \lambda$, для каждого $F \in \gamma$; 3) из каждого открытого покрытия пространства X можно выделить подпокрытие мощности, меньшей чем λ ; 4) для каждого $F \in \gamma$ $|\{F' \in \gamma: F' \cap F \neq \emptyset\}| \leq \tau$; 5) $\bigcup \gamma = X$. Тогда $|\gamma| \leq \tau$.

Доказательство. Для каждого $F \in \gamma$ зафиксируем базу θ_F множества F в X , для которой $|\theta_F| < \lambda$. Если $A \subset X$, то $\gamma_A = \{F \in \gamma: F \cap A \neq \emptyset\}$. Далее, $\mathcal{E} = \{\eta \subset \mathcal{T}: |\eta| < \lambda \text{ и } \bigcup \eta \neq X\}$. Для всех $\eta \in \mathcal{E}$ мы фиксируем $c(\eta) \in X \setminus \bigcup \eta$. Из 2) легко следует

Лемма 1. Если $A \subset X$, то $\gamma_{[A]} = \bigcup \{\gamma_{[M]}: M \subset A \text{ и } |M| < \lambda\}$.

Лемма 2. Если $A \subset X$ и $|A| \leq \tau$, то $|\gamma_{[A]}| \leq \tau$.

В силу 1) $\lambda \leq \tau$. Поэтому (см. лемму 1) достаточно рассмотреть случай, когда $|A| = \lambda' < \lambda$. Определим отображение $\varphi: \gamma_{[A]} \rightarrow \text{Ехр Ехр } A$ так: $\varphi(F) = \{U \cap A: U \in \theta_F\}$. Ясно, что $|\varphi(F)| \leq |\theta_F| < \lambda$. Значит, $\varphi(\gamma_{[A]}) \subset \text{Ехр}_\lambda \text{Ехр } A = \{\xi \subset \text{Ехр } A: |\xi| < \lambda\}$. Но $|\text{Ехр}_\lambda \text{Ехр } A| \leq \Sigma \cdot \{(2^{\lambda'})^{\lambda'}: \lambda'' < \lambda\} \leq \Sigma \cdot \{\tau^{\lambda'}: \lambda'' < \lambda\} \leq \tau \cdot \lambda = \tau$. Значит, $|\varphi(\gamma_{[A]})| \leq \tau$.

Пусть теперь $F', F'' \in \gamma_{[A]}$ и $B' = F' \cap [A]$, $B'' = F'' \cap [A]$. Если $U' \in \varphi(\{F'\})$, то $[U'] \supset B'$. Если $V \in \mathcal{T}$ и $V \supset B'$, то $U'' \subset V$ для некоторого $U'' \in \varphi(\{F''\})$. Из последних двух замечаний и регулярности X следует, что если $B' \neq B''$, то $\varphi(\{F'\}) \neq \varphi(\{F''\})$. Значит, $\varphi^{-1}\varphi(\{F'\}) = \{F' \in \gamma: F' \cap [A] = F' \cap [A] \neq \emptyset\}$. В силу 4) отсюда следует, что $|\varphi^{-1}\varphi(\{F'\})| \leq \tau$. Но $|\varphi(\gamma_{[A]})| \leq \tau$. Значит, $|\gamma_{[A]}| \leq \tau$. Лемма 2 доказана.

Положим $M_0 = \{c(\{\Lambda\})\}$. Если $\alpha^* < \lambda$ и для всех $\alpha < \alpha^*$ множества M_α определены так, что $|M_\alpha| \leq \tau$, то полагаем $L_{\alpha^*} = \bigcup \{M_\alpha: \alpha < \alpha^*\}$, $\theta_{\alpha^*} = \bigcup \{\theta_F: F \in \gamma_{[L_{\alpha^*}]}\}$, $\mathcal{E}_{\alpha^*} = \{\eta \in \mathcal{E}: \eta \subset \theta_{\alpha^*}\}$ и $M_{\alpha^*} = L_{\alpha^*} \cup \{c(\eta): \eta \in \mathcal{E}_{\alpha^*}\}$. Тогда (см. условие 1 и лемму 2), $|L_{\alpha^*}| \leq \tau$, $|\theta_{\alpha^*}| \leq \tau$, $|\mathcal{E}_{\alpha^*}| \leq \tau$ и $|M_{\alpha^*}| \leq \tau$. Так возникает трансфинитная последовательность $\{M_\alpha: \alpha < \lambda\}$. Положим $M^* = \bigcup \{M_\alpha: \alpha < \lambda\}$. Так как $\lambda \leq \tau$, то $|M^*| \leq \tau$. В силу леммы 2, $|\gamma_{[M^*]}| \leq \tau$. Покажем, что $\bigcup \gamma_{[M^*]} = X$. Из 4) тогда будет следовать, что $|\gamma| \leq \tau$. Пусть $z \in X \setminus \bigcup \gamma_{[M^*]}$. В силу леммы 1 и регулярности λ , $\gamma_{[M^*]} = \bigcup \{\gamma_{[M_\alpha]}: \alpha < \lambda\}$. Для каждого $F \in \gamma_{[M_\alpha]}$ зафиксируем $U_F \in \theta_F$ такое, что $F \subset U_F \subset X \setminus \{z\}$. В силу 3) существует $\gamma^* \subset \gamma_{[M_\alpha]}$ такое, что $|\gamma^*| < \lambda$ и $\eta^* = \{U_F: F \in \gamma^*\}$ — покрытие $[M^*]$. Из $\gamma^* \subset \bigcup \{\gamma_{[M_\alpha]}: \alpha < \lambda\}$, $|\gamma^*| < \lambda$ и регулярности λ следует, что $\gamma^* \subset \gamma_{[M_\beta]}$ для некоторого $\beta < \lambda$. Тогда $\eta^* \subset \theta_{\beta+1}$, $|\eta^*| \leq |\gamma^*| < \lambda$ и $\bigcup \eta^* \neq X$ — ибо $\bigcup \eta^* \not\ni z$. Значит, $\eta^* \in \mathcal{E}_{\beta+1}$ и $c(\eta^*) \in M_{\beta+1} \subset M^*$. Но $c(\eta^*) \in X \setminus \bigcup \eta^*$, и из $\bigcup \eta^* \supset [M^*]$ следует, что $c(\eta^*) \notin M^*$. Теорема 4 доказана.

Следствие 4.1. Если X — бикомпакт и γ — его покрытие бикомпактами счетного характера в X такое, что каждый элемент γ имеет не более чем 2^{κ_0} соседей (в смысле 4)), то $|\gamma| \leq 2^{\kappa_0}$.

Следствие 4.2. Если τ — сильно недостижимый кардинал, X — бикомпакт и γ — покрытие X бикомпактами, каждый из которых имеет в γ не более чем τ соседей (см. 4)), причем $\chi(F, X) < \tau$ для всех $F \in \gamma$, то $|\gamma| \leq \tau$.

Пример. Пусть X — дискретное пространство мощности $2^{(2^{\aleph_0})}$ и βX — его стоун-чеховское расширение. Положим $\gamma_1 = \{\{x\}: x \in X\} \cup \{\beta X\}$. Тогда γ_1 — покрытие βX бикомпактами характера 1 в βX , и кратность γ_1 в каждой точке не превосходит двух. Значит, утверждение 4.1 не распространяется на точечно-конечные покрытия бикомпакта бикомпактами счетного характера. Далее, X функционально замкнуто (т. е. $\mathcal{Q}$ — пространство),

* Первое более громоздкое доказательство этой теоремы было получено мной в 1969 г.

поэтому $\beta X \setminus X = \bigcup \gamma^*$, где γ^* — некоторое семейство бикомпактов счетного характера в βX (см., например, (4)). Положим $\gamma_2 = \gamma^* \cup \{\{x\} : x \in X\}$. Тогда γ_2 — покрытие βX бикомпактами счетного характера, из которого нельзя выделить никакого семейства мощности меньшей, чем $|X| = 2^{(\aleph_0)}$, объединение которого плотно в X (см. вопрос II в (6)).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Архангельский, ДАН, т. 187, № 5 (1969). ² А. В. Архангельский, ДАН, т. 192, № 2 (1970). ³ А. В. Архангельский, ДАН, т. 199, № 6 (1971). ⁴ А. В. Архангельский, Матем. сб., т. 91 (133), 1(5) (1973). ⁵ I. Juhász, Cardinal Functions in Topology, Amsterdam, 1971. ⁶ I. Juhász, Gen. Top. Appl., v. 2, № 3 (1972). ⁷ Б. Э. Шапировский, ДАН, т. 206, № 3 (1972).