

УДК 519.2

МАТЕМАТИКА

А. В. БУЛИНСКИЙ, И. Г. ЖУРБЕНКО

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 VII 1975)

Пусть каждому t из целочисленной решетки Z^n евклидова пространства R^n соответствует случайная величина $\xi(t)$ с $M\xi(t)=0$. Мы будем рассматривать суммы

$$\eta_k = \sum_{t \in U_k} \xi(t),$$

где U_k — последовательность конечных подмножеств Z^n по N_k элементов. Будем говорить, что последовательность η_k подчинена центральной предельной теореме, если при $k \rightarrow \infty$ для каждого a

$$P\left(\frac{\eta_k}{\sigma_k} < a\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} dx, \quad (*)$$

где σ_k^2 — дисперсия η_k .

Существенную роль далее играют некоторые «условия перемешивания», выражающиеся через розенблаттовский коэффициент связи

$$\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \sup_{A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}} |P(AB) - P(A)P(B)|$$

между двумя алгебрами событий. Для любых двух подмножеств U' и U'' решетки Z^n положим

$$\alpha(U', U'') = \alpha(\mathfrak{A}(U'), \mathfrak{A}(U'')),$$

где $\mathfrak{A}(U)$ — σ -алгебра событий, порождаемая всеми $\xi(t)$, $t \in U$.

Обозначая $|U|$ число элементов в множестве U и $\rho(U', U'')$ — евклидово расстояние между множествами U' и U'' , определим коэффициент перемешивания

$$\alpha_m(r) = \sup_{|U'|+|U''|=m, \rho(U', U'') \geq r} \alpha(U', U'').$$

Теорема 1. *Предельное соотношение (*) имеет место, если выполнены условия:*

(А) $\sup_t M|\xi(t)|^p = c_p < \infty$, $p=1, 2, \dots$;

(Б) $\alpha_p(r) = O(r^{-p})$ при $r \rightarrow \infty$ для любых натуральных p и q ;

(В) $N_k^{-\beta} \sigma_k \rightarrow \infty$ для некоторого $\beta > 1/3$ при $k \rightarrow \infty$.

Условия перемешивания типа (Б) были введены Р. Л. Добрушиным (1), который показал, что они выполняются для широкого класса случайных полей ξ . Представляется существенным, что при фиксированном p условие (Б) накладывает ограничения только на алгебры множеств, порождаемые p величинами $\xi(t)$ и что в условиях (А) и (Б) не содержится каких-либо требований равномерности по p . Уже в одномерном случае $n=1$ условие (Б) существенно слабее аналогичного условия, налагаемого на алгебры $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$, порождаемые соответственно всеми $\xi(t)$ с $t \leq s$ и всеми $\xi(t)$ с $t \geq s+r$.

Доказательство теоремы 1 опирается на аппарат моментов и семинвариантов. Следуя (2) для заданных на Z^n функций ξ и μ , где $\mu(t) =$

целое неотрицательное и отлично от нуля лишь на конечном множестве, положим

$$|\mu| = \sum_t \mu(t), \quad \xi^\mu = \prod_t (\xi(t))^{\mu(t)}, \quad \mu! = \prod_t \mu(t)!$$

При этих обозначениях моменты поля ξ запишутся в виде

$$M_\mu = M \xi^\mu, \quad (4)$$

а семиинварианты в виде

$$S_\mu = \mu! \sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{M_{v_1} \dots M_{v_k}}{v_1! \dots v_k!}, \quad (2)$$

где суммирование производится по всем упорядоченным наборам $(v_1, \dots, v_k)$, подчиненным условию $v_1 + \dots + v_k = \mu$.

Пусть $T(\mu) = \{t: \mu(t) > 0\}$ — носитель функции μ . Аналогично теореме 17.2.2 монографии ⁽³⁾ доказывается следующая

Л е м м а 1. Пусть $T(\mu) = T' \cup T''$, $T'T'' = \emptyset$, $|T(\mu)| = s$, $\rho(T', T'') = r$, $\mu = \mu' + \mu''$, $T(\mu') = T'$, $T(\mu'') = T''$, $p > 2$.

Тогда

$$|M_\mu - M_\mu \cdot M_{\mu''}| \leq 10 c_{p|\mu|}^{1/p} \alpha_s^{(p-2)/p}(r). \quad (3)$$

Из леммы 1 можно вывести лемму 2.

Л е м м а 2. В условиях леммы 1 при $T' \neq \emptyset$, $T'' \neq \emptyset$

$$|S_\mu| \leq 10 |\mu|^{|\mu|} c_{p|\mu|}^{1/p} \alpha_s^{(p-2)/p}(r). \quad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о *. Неотрицательная целозначная функция $v \leq \mu$ однозначно представляется в виде $v = v' + v''$, $T(v') \subset T'$, $T(v'') \subset T''$. Пусть

$$L_v = M_v \cdot M_{v'}, \quad D_v = M_v - L_v.$$

Имеет место тождество

$$M_{v_1} \dots M_{v_k} = \sum_{l=1}^k L_{v_1} \dots L_{v_{l-1}} D_{v_l} M_{v_{l+1}} \dots M_{v_k} + L_{v_1} \dots L_{v_k}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2), получаем

$$S_\mu = \mu! \sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{\sum_{l=1}^k L_{v_1} \dots L_{v_{l-1}} D_{v_l} M_{v_{l+1}} \dots M_{v_k}}{v_1! \dots v_k!} + \\ + \mu! \sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{L_{v_1} \dots L_{v_k}}{v_1! \dots v_k!}. \quad (6)$$

Вторая сумма в (6) равна нулю, так как это не что иное, как выражение для семиинварианта S_μ видоизмененного поля ξ , где группы величин $\xi(t)$, соответствующие множествам T' и T'' , независимы, а распределение вероятностей для каждой из этих групп оставлено прежним. Для окончания доказательства леммы 2 остается подставить в равенство (6), освобожденное от второй суммы справа, оценки

$$|M_v| \leq c_{p|\mu|}^{[v]/p|\mu|}, \quad |L_v| \leq c_{p|\mu|}^{[v]/p|\mu|},$$

$$|D_v| \leq 10 c_{p|v|}^{1/p} \alpha_s^{(p-2)/p}(r) \leq 10 c_{p|\mu|}^{[v]/p|\mu|} \alpha_s^{(p-2)/p}(r)$$

* В случае ограниченности $\xi(t)$ можно доказать оценку $|S_\mu| \leq 4 c^{|\mu|} |\mu|^{|\mu|} \alpha_s(r)$, где $c = \sup_t |\xi(t)|$.

и воспользоваться тем, что

$$\sum_{v_1 + \dots + v_k = \mu} \frac{1}{v_1! \dots v_k!} \leq \frac{|\mu|^{|\mu|}}{\mu!}. \quad (7)$$

Пусть

$$\delta(\mu) = \sup \rho(T', T'')$$

по всем разбиениям $T(\mu) = T' \cup T''$ на непустые множества T' и T'' .

При помощи леммы 2 легко показать, что из условия (Б) теоремы 1 вытекает справедливость условия

$$(Г) \quad \Gamma_m(r) = \sup_{|\mu|=m, \delta(\mu) \geq r} |S_\mu| = O(r^{-q})$$

при любых натуральных m и q .

Поэтому, теорема 1 является следствием такой теоремы:

Теорема 2. Соотношение (*) выполнено, если выполнены условия (А), (Г) и (В).

Чтобы доказать теорему 2, достаточно в силу теоремы Маркова (см., напр., (4)) установить, что семинварианты

$$s_m^{(h)} = \frac{m!}{\sigma_k^m} \sum_{\substack{|\mu|=m, \\ T(\mu) \subset U_k}} \frac{S_\mu}{\mu!} \quad (8)$$

нормированных сумм η_μ / σ_k при $m \geq 3$ в условиях теоремы стремятся к нулю. Для этого при оценке суммы (8) надо отдельно учитывать вклад слагаемых с малыми значениями $\delta(\mu)$ и с большими значениями $\delta(\mu)$, пользуясь в первом случае оценкой *

$$|S_\mu| \leq c_m m^m, \quad (9)$$

а во втором случае условием (Г).

Представим правую часть (8) в виде

$$\frac{m!}{\sigma_k^m} \sum_{J_1} \frac{S_\mu}{\mu!} + \frac{m!}{\sigma_k^m} \sum_{J_2} \frac{S_\mu}{\mu!}$$

где

$$J_1 = \{\mu: |\mu| = m, T(\mu) \subset U_k, \delta(\mu) < L\}, \\ J_2 = \{\mu: |\mu| = m, T(\mu) \subset U_k, \delta(\mu) \geq L\}, \quad L \geq 1.$$

В каждой сумме, выделяя максимальный член и оценивая сверху $|J_1|$ и $|J_2|$, имеем

$$|s_m^{(h)}| \leq \frac{N_k}{\sigma_k^m} m! 2^{(m-1)(n+1)} (mL)^{n(m-1)} \max_{J_1} |S_\mu| + \frac{N_k^m}{\sigma_k^m} \max_{J_2} |S_\mu|. \quad (10)$$

Взяв $L = N_k^\gamma$, где $\gamma < \frac{3\beta-1}{3n(m-1)}$, учитывая (9), (10) и условие (Г), получаем требуемое утверждение.

Авторы признательны акад. А. Н. Колмогорову за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Л. Добрушин, Теория вероятн. и ее применения, т. 15, № 3, 469 (1970).
² Н. Г. Журбенко, Сибирск. матем. журн., т. 13, № 2, 293 (1972). ³ И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965.
⁴ В. П. Леонов, Некоторые применения старших симинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М., 1964.

* Оценка (9) вытекает из (2) и неравенства $|M_v| \leq c_m^{|v|/m}$, верного при $|v| \leq m = |\mu|$.