МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

РАЗРЕШИМЫЕ НАСЫЩЕННЫЕ ФОРМАЦИИ СО СВОЙСТВОМ $\mathcal{P}_2$ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С.В. Балычев, А.С. Вегера

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SOLUBLE SATURATED FORMATIONS WITH THE $\mathcal{P}_2$ PROPERTY FOR FINITE GROUPS

S.V. Balychev, A.S. Vegera

F. Scorina Gomel State University

Исследуются конечные группы, представимые в виде произведения попарно перестановочных подгрупп с формационными ограничениями на их частичные произведения. В частности, получено описание введенных Б. Амбергом, Л.С. Казариным и Б. Хефлингом разрешимых наследственных насыщенных формаций групп со свойством $\mathcal{P}_2$.

Ключевые слова: *конечная группа, произведение попарно перестановочных подгрупп, формация со свойством $\mathcal{P}_2$, формация с условием Кегеля, формация с условием Шеметкова.*

The finite groups that can be represented as a product of pairwise permutable subgroups with formational restrictions on factors and their partial products are studied. In particular, the description of solvable hereditary saturated formations of groups with the property $\mathcal{P}_2$ introduced by B. Amberg, A.S. Kazarin and Hefling is obtained.

Keywords: *finite group, product of pairwise permutable subgroups, formation with the $\mathcal{P}_2$ property, formation with the Kegel property, formation with the Shemetkov property.*

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Введение

Все рассматриваемые группы являются конечными. Группа G называется произведением попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если $G = A_1A_2\cdots A_n$ и $A_iA_j = A_jA_i$ для любых пар чисел $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Изучению групп с такой факторизацией посвящены классические работы Ф. Холла, С.А. Чунихина, Б. Хупперта, Г. Виландта, О. Кегеля, Л.С. Казарина. Ряд важных результатов, полученных в этом направлении до 2010 года, отражены в монографии [1].

В работе [2] В. Амберг, Л.С. Казарин и Б. Хёфлинг, используя методы теории классов (формаций), получили существенное продвижение в изучении групп, факторизуемых своими попарно перестановочными подгруппами. Ими было введено следующее

Определение. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы групп и k – натуральное число. Говорят, что класс $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathcal{P}_k$ для $\mathfrak{X}$-групп, если $\mathfrak{X}$-группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ в том случае, когда G может быть записана в виде произведения n подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таких, что для каждого выбора индексов $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n$ группа $A_{i_1}\cdots A_{i_k}$ принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Если $\mathfrak{X}$ совпадает с классом всех групп, то в этом случае просто говорят, что класс $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathcal{P}_k$.

В работе [2] для каждого натурального $k \ge 2$ были построены серии разрешимых формаций, обладающие свойством $\mathcal{P}_k$, но не обладающие свойством $\mathcal{P}_{k-1}$. Полностью описаны все разрешимые наследственные и насыщенные классы (формации) групп, имеющие свойство $\mathcal{P}_1$ для разрешимых групп. Приведены также серии формаций произвольных групп, обладающих свойством $\mathcal{P}_1$.

В настоящей статье мы продолжаем исследования, начатые в [2]. Нами исследуется следующая естественная

Проблема. Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный класс групп и n – заданное натуральное число, $n > 1$. Найти конструктивное описание всех насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, имеющих свойство $\mathcal{P}_n$ для $\mathfrak{X}$-групп.

Настоящая работа посвящена решению данной проблемы для разрешимых наследственных насыщенных формаций в случае, когда $n = 2$ и $\mathfrak{X}$ совпадает с классом всех групп.

© Балычев С.В., Вегера А.С., 2020

1 Предварительные сведения

В работе используются стандартные обозначения, определения и известные результаты, которые при необходимости можно найти в монографиях [1], [3]–[4]. В настоящем разделе мы приводим необходимые сведения, которые нам потребуются для краткости формулировок и доказательств основных результатов работы.

Закрепим следующие обозначения: $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Пусть G – группа, $p \in \mathbb{P}$, π – некоторое множество простых чисел; через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка G; $\mathrm{Syl}(G)$ – множество всех силовских подгрупп G; $F_p(G)$ – p-нильпотентный радикал группы G, т. е. наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа G; $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G; 1 – единичная группа; $N \rtimes M$ обозначает полупрямое произведение групп N и M.

Будем использовать следующие стандартные обозначения для классов групп:

$\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп; $\mathfrak{S}_\pi$ – класс всех разрешимых π-групп, где π – некоторое мно-жество простых чисел ($\mathfrak{N}_p = \mathfrak{S}_\pi$, для $\pi = \{p\}$); $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{N}_\pi$ – класс всех нильпотентных π-групп; $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп.

Класс групп $\mathfrak{X}$ называется формацией, если:

1) из $G \in \mathfrak{X}$ и $N \lhd G$, всегда следует, что $G / N \in \mathfrak{X}$;

2) из $G / N_1 \in \mathfrak{X}$ и $G / N_2 \in \mathfrak{X}$, всегда следует, что $G / N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{X}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из $G / N \in \mathfrak{F}$ и $N \subseteq \Phi(G)$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется наследственной (нормально наследственной), если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит все ее (нормальные) подгруппы. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G для которой $G / G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Напомним, что нормально наследственный класс $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу $G = AB$, являющуюся произведением своих нормальных (субнормальных) $\mathfrak{F}$-подгрупп A и B. Формация групп, одновременно являющаяся классом Фиттинга, называется формацией Фиттинга.

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Группа G называется минимальной не $\mathfrak{X}$-группой, если G не принадлежит $\mathfrak{X}$, а все собственные ее подгруппы принадлежат $\mathfrak{X}$. Минимальные не $\mathfrak{N}$-группы называются группами Шмидта. Множество минимальных не $\mathfrak{X}$-групп для класса $\mathfrak{X}$ обозначается через $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$.

Функция $f : \mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется локальным экраном. Через $LF(f)$ обозначается класс всех групп G, у которых для любого главного фактора H / K и для каждого $p \in \pi(H / K)$ выполняется условие:

$$G / C_G(H / K) \in f(p).$$

Формация $\mathfrak{F}$ называется локальной, если существует локальный экран f, такой что $\mathfrak{F} = LF(f)$. Согласно знаменитой теореме Гашюца – Любезедер – Шмида непустая формация является насыщенной тогда и только тогда, когда она локальна.

***Лемма* 1.1** [3, лемма 4.5]. *Пусть f – локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G / F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$. Тогда локальный экран h, где $h(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p также является локальным экраном $\mathfrak{F}$. Такой локальный экран называется полным. Локальный экран f называется внутренним, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого простого p. Согласно теореме 3.3 из [3] всякая локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний локальный экран h, причем h является полным.

Формация $\mathfrak{F}$ называется разрешимой, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$; локальный экран f называется разрешимым, если $f(p) \subseteq \mathfrak{S}$ для каждого простого p.

Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая локальная формация. Множество Ω всех ее разрешимых локальных экранов можно считать частично упорядоченным с отношением, которое задается следующим образом: если f_1, f_2 – элементы множества Ω, то $f_1 \leq f_2$, если $f_1(p) \subseteq f_2(p)$ для любого простого числа p. К. Дерк доказал, что множество Ω в данном упорядочении имеет единственный максимальный элемент. Используя идею Дерка, в работе [5] был получен аналогичный результат для случая, когда $\mathfrak{F}$ – разрешимая наследственная локальная формация, а Ω – множество всех ее наследственных локальных экранов.

***Лемма* 1.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая наследственная локальная формация и h – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный разрешимый максимальный наследственный локальный экран f, причем f полный, т. е. $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для каждого простого p*;

(2) $\mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)) \cap \mathfrak{F}$ *для любого простого p*.

Для получения основного результата работы нами существенно будет использоваться

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

конструкция формации $w\mathfrak{F}$. Для ее определения и применения нам потребуются определение и известные свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, доказательства которых можно найти в монографии [4].

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа *H* группы *G* называется $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в *G*, если либо $H = G$, либо существует цепь максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$$

такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$. Кратко обозначается H $\mathfrak{F}$-sn G.

***Лемма* 1.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, H и K – подгруппы группы G и $N \lhd G$. Тогда справедливы следующие результаты.*

(1) *Если H $\mathfrak{F}$-sn G, то HN/N $\mathfrak{F}$-sn G/N.*

(2) *Если H/N $\mathfrak{F}$-sn G/N, то H $\mathfrak{F}$-sn G.*

(3) *Если H $\mathfrak{F}$-sn G, то HN $\mathfrak{F}$-sn G.*

(4) *Если H $\mathfrak{F}$-sn K и K $\mathfrak{F}$-sn G, то H $\mathfrak{F}$-sn G.*

(5) *Если все композиционные факторы G принадлежат $\mathfrak{F}$, то всякая субнормальная подгруппа G является $\mathfrak{F}$-субнормальной.*

(6) *Пусть p – простое число и G – p-группа, если $Z_p \in \mathfrak{F}$, то все подгруппы G являются $\mathfrak{F}$-субнормальными.*

***Лемма* 1.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, $H \le G$ и $M \le G$. Тогда справедливы следующие результаты.*

(1) *Если H $\mathfrak{F}$-sn G, то $H \cap M$ $\mathfrak{F}$-sn M.*

(2) *Если H $\mathfrak{F}$-sn G и M $\mathfrak{F}$-sn G*, то *$H \cap M$ $\mathfrak{F}$-sn G*;

(3) *Если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$-sn G.*

В работе [6] было начато рассмотрение следующей задачи. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Что можно сказать о структуре группы *G*, если все ее силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны в *G*? В статье [7] был введен и исследовался класс групп $w\mathfrak{F}$.

***Определение* 1.5** [7]. Для непустой формации $\mathfrak{F}$ через $w\mathfrak{F}$ обозначается класс всех групп *G* таких, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и в *G* любая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна.

В работах [7]–[8] были установлены основные свойства формации $w\mathfrak{F}$. В работе [7] было доказано, что если $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, то $w\mathfrak{F}$ также является наследственной насыщенной формацией. В [8] было подробно изучено локальное задание $w\mathfrak{F}$ и найдены необходимые и достаточные условия, при которых $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

2 Основной результат

Начало изучения формаций со свойством $\mathcal{P}_2$ восходит к работам О. Кегеля и Б. Хупперта. Пусть группа $G = A_1 A_2 \cdots A_n$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и π – множество простых чисел. Из результата О. Кегеля [9] и леммы 2.2 [1] следует, что *G* имеет нормальную холлову π-подгруппу, если каждое из произведений $A_i A_j$ имеет нормальную холлову π-подгруппу. В частности, если все $A_i A_j$ нильпотентны, то и группа *G* нильпотентна. В [10, теорема VI, 10.2] Б. Хупперт показал, если каждое произведение $A_i A_j$ группы *G* является φ-дисперсивной подгруппой, где φ – некоторое линейное упорядочение множества, то и сама группа *G* будет φ-дисперсивной.

Сформулируем важный для нашей работы результат Л.С. Казарина.

***Теорема* 2.1** [11]. *Пусть группа $G = A_1 A_2 \cdots A_n$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если каждая подгруппа $A_i A_j$ разрешима, то и сама группа G разрешима.*

Для доказательства основного результата нам потребуются следующие две леммы.

***Лемма* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая наследственная насыщенная формация, имеющая свойство $\mathcal{P}_2$. Тогда $\mathfrak{F}$ является формацией Фиттинга.*

Доказательство. Нам необходимо показать, что формация $\mathfrak{F}$ замкнута относительно взятия произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Предположим противное. Выберем группу $G = HK$ минимального порядка такую, что *H* и *K* – нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы *G*, но $G \notin \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – разрешимая формация, то $G \in \mathfrak{S}$.

Пусть *N* – минимальная нормальная подгруппа группы *G*. Тогда для G/N все условия леммы выполняются. Поэтому $G/N \in \mathfrak{F}$. Из того, что $\mathfrak{F}$ – формация, следует, что *N* – единственная минимальная нормальная подгруппа в *G*. Из насыщенности $\mathfrak{F}$ вытекает, что $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = N \rtimes M$, где *M* – некоторая максимальная подгруппа группы *G* и $N = F(G) = C_G(N)$. Из $N \subseteq H$ и

$$H = H \cap NM = N(H \cap M),$$

$N \subseteq K$ и $K = K \cap NM = N(K \cap M)$ следует, что $H \cap M$ и $K \cap M$ – нормальные группы в *M* и $M = (M \cap H)(M \cap K)$.

Рассмотрим факторизацию $G = NT_1T_2$, где $T_1 = H \cap M$ и $T_2 = K \cap M$. Заметим, что $T_1T_2 = M \in \mathfrak{F}$. Тогда $NT_1 = H \in \mathfrak{F}$ и $NT_2 = K \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathcal{P}_2$, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. □

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Лемма 2.3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– разрешимая наследственная насыщенная формация, имеющая свойство* $\mathcal{P}_2$. *Тогда* $\mathrm{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Доказательство. По 2) теоремы 3.1 из [8] формация $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{F}$.

Докажем обратное включение $\mathrm{w}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathrm{w}\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F} \neq \varnothing$. Выберем группу G минимального порядка из $\mathrm{w}\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ и $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ – наследственные насыщенные формации, то нетрудно показать, что группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, $\Phi(G) = 1$ и $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Ввиду разрешимости G выполняется $N = F(G)$.

Так как группа G разрешима, то по теореме Холла G можно представить в виде произведения ее попарно перестановочных силовских подгрупп, т. е. $G = G_{p_1} G_{p_2} \cdots G_{p_n}$, где G_{p_i} – силовская p_i-подгруппа и $p_i \in \pi(G)$ для любого $i \in \{1, ..., n\}$. Рассмотрим следующие случаи:

1. Пусть $n = 1$. Тогда $G = G_{p_1}$. Из насыщенности $\mathfrak{F}$ и $p_1 \in \pi(\mathrm{w}\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$ следует $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

2. Пусть $n > 2$. Тогда $G = G_{p_1} G_{p_2} \cdots G_{p_n}$. Так как $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$, то для любой $G_{p_i} \in \mathrm{Syl}(G)$ верно, что G_{p_i} $\mathfrak{F}$-sn G для $i \in \{1, ..., n\}$. Рассмотрим произведение $G_{p_i} G_{p_j}$, где $i, j \in \{1, ..., n\}$ и $i \neq j$. Ввиду (1) леммы 1.4 имеем, что G_{p_i} $\mathfrak{F}$-sn $G_{p_i} G_{p_j}$. Так как $|G_{p_i} G_{p_j}| < |G|$ и $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, то $G_{p_i} G_{p_j} \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathcal{P}_2$, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

3. Пусть $n = 2$. Тогда $G = G_{p_1} G_{p_2}$ представима в виде $G = N \rtimes M$, где M – максимальная подгруппа G. Возможны два случая:

a) $p_1, p_2 \in \pi(M)$ и N – p_1-группа. Тогда $M = M_{p_1} M_{p_2}$, где M_{p_i} – силовские p_i-подгруппы группы M для $i \in \{1, 2\}$. Следовательно, $G = N M_{p_1} M_{p_2}$. Так как $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией, то $N M_{p_1} \in \mathfrak{F}$. Так как порядок $|N M_{p_2}| < |G|$ и $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$, то $N M_{p_2} \in \mathfrak{F}$. Аналогично, $M_{p_1} M_{p_2} \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathcal{P}_2$, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

b) $p_1 \notin \pi(M)$ и $p_2 \in \pi(M)$ и N – силовская p_1-группа. Тогда $G = G_{p_1} G_{p_2} = NM = F(G)M$. Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и G_{p_2} $\mathfrak{F}$-sn G, то по теореме 15.10 [3] следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Итак, $\mathrm{w}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathrm{w}\mathfrak{F}$. □

Обратное утверждение неверно. В качестве примера можем взять формацию $\mathfrak{F} = \mathrm{w}\mathfrak{U}$ всех расширенно сверхразрешимых групп, свойства которой хорошо изучены в работе [12]. Формация $\mathfrak{F} = \mathrm{w}\mathfrak{U}$ не является формацией Фиттинга, поэтому ввиду леммы 2.2 не обладает свойством $\mathcal{P}_2$. С другой стороны, ввиду утверждения 3) леммы 1.2 из [7] выполняется

$$\mathrm{w}\mathfrak{F} = \mathrm{w}(\mathrm{w}\mathfrak{U}) = \mathfrak{F}.$$

Напомним [5], что формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию Кегеля, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу $G = AB = BC = AC$, где подгруппы A, B и C принадлежат $\mathfrak{F}$. Условию Кегеля удовлетворяют, например, формации всех нильпотентных групп [9], всех разрешимых групп [11]. Разрешимые насыщенные формации с условием Кегеля изучались в работах [5], [13]–[15].

Отметим необходимые для доказательства основной нашей теоремы результаты.

Лемма 2.4 [2, лемма 2.2]. *Пусть* $\mathfrak{Y}$ *и* $\mathfrak{X}$ *– классы групп и* $\mathfrak{X}$ *обладает следующим свойством: как только* $\mathfrak{Y}$*-группа G имеет* $\mathfrak{X}$*-подгруппы A, B и C, такие что* $G = AB = AC = BC$, *то G является* $\mathfrak{X}$*-группой. Тогда* $\mathfrak{X}$ *удовлетворяет* $\mathcal{P}_2$ *для* $\mathfrak{Y}$*-групп.*

Теорема 2.5 [5, лемма 2.2]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда* $\mathfrak{F}$ *в том и только том случае удовлетворяет условию Кегеля, когда* $\mathfrak{F}$ *имеет такой полный локальный экран f, что при любом* $p \in \pi(\mathfrak{F})$ *имеет место* $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$.

Докажем основной результат работы.

Теорема 2.6. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *Формация* $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет условию Кегеля.*

(2) *Формация* $\mathfrak{F}$ *имеет свойство* $\mathcal{P}_2$.

(3) $\mathfrak{F}$ *является формацией Фиттинга и* $\mathfrak{F} = \mathrm{w}\mathfrak{F}$.

(4) *Формация* $\mathfrak{F}$ *имеет максимальный разрешимый наследственный локальный экран f такой, что*

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}); \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Доказательство. Импликация из $(1) \Rightarrow (2)$ получается из леммы 2.4.

Установим $(2) \Rightarrow (3)$. Пусть разрешимая наследственная насыщенная формация $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathcal{P}_2$. Тогда по лемме 2.2 $\mathfrak{F}$ является формацией Фиттинга. Применяя лемму 2.3 получаем, что $\mathfrak{F} = \mathrm{w}\mathfrak{F}$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Докажем, что из (3) следует (4). Пусть h – максимальный внутренний локальный экран формацияи $\mathfrak{F}$. По лемме 1.2 формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным разрешимым максимальным наследственным локальным экраном f, который является полным и

$$\mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)) \cap \mathfrak{F}.$$

Рассмотрим локальный экран g такой, что $g(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $g(p) = \varnothing$, если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F})$.

Покажем, что $f(p) = g(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Ясно, что $f(p) \subseteq g(p)$ для любого p. Допустим, что класс $g(p) \setminus f(p)$ непуст для некоторого простого p. Выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как $f(p)$ и $g(p)$ – наследственные формации, то

$$G \in \mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)) \cap \mathfrak{F}.$$

Из полноты экрана f и выбора G следует, что $O_p(G) = 1$ и в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N. Тогда существует точный неприводимый G-модуль U над полем F_p, где F_p – поле из p элементов. Рассмотрим полупрямое произведение $R = U \rtimes G$. Ясно, что U является единственной минимальной нормальной подгруппой группы R, причем $U = F_p(R)$.

Установим, что R является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. Так как

$$G \in \mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)) \cap \mathfrak{F},$$

то $G \in \mathfrak{F}$. Из $G \in \mathcal{M}(f(p))$ и свойств подгруппы U следует, что $G^{\mathfrak{F}} = U$. Пусть H – произвольная максимальная подгруппа группы R, не сопряженная с подгруппой G. Тогда $U \subseteq H$. Из $\mathcal{M}(f(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)$ и $R/U \simeq G \in \mathcal{M}(f(p))$ вытекает, что $H/U \in h(p)$. Так как $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p)$ и $h(p) \subseteq \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$. Отсюда из наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что любая собственная подгруппа из R принадлежит $\mathfrak{F}$. Следовательно, R является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой.

Используя свойства формации $\mathfrak{F}$ из пункта 2) нашей теоремы уточним строение группы $R = U \rtimes G$. Покажем, что подгруппа G является q-подгруппой для некоторого простого q отличного от p. Допустим противное. Пусть S – силовская подгруппа группы R. Тогда подгруппа US является собственной подгруппой R. Так как $U = G^{\mathfrak{F}}$, то из (2) по лемме 1.3 следует, US является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в R. Из $US \in \mathfrak{F}$ и наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что подгруппа U $\mathfrak{F}$-субнормальна в US. Теперь из (4) леммы 1.3 следует, U является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G. Отсюда и из $\pi(R) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ следует, что $R \in \mathrm{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Будем считать, что G – q-подгруппа для некоторого простого q отличного от p. Покажем, что G является циклической q-группой. Допустим противное. Тогда в G найдутся, по крайней мере, две различные максимальные подгруппы S_1 и S_2. Рассмотрим подгруппы $T_1 = US_1$ и $T_2 = US_2$. Ясно, что T_1 и T_2 – нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы в R и $R = T_1T_2$. Так как по условию $\mathfrak{F}$ является формацией Фиттинга, то получаем, что $R \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с $R \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$.

Пусть G – циклическая q-группа и $|G| = q^n$. Предположим, что $n > 1$. Пусть Q и Z – циклические группы, причем $|Q| = q^{n-1}$ и $|Z| = q$. Рассмотрим регулярное сплетение $F = Q \wr Z$. Тогда $F = Q \wr Z = W \rtimes Z$, где W – база сплетения $F = Q \wr Z$. По известной теореме Калужнина – Краснера группа G вкладывается в качестве подгруппы в $F = Q \wr Z$. Так как $f(p)$ – наследственная формация и G не принадлежит $f(p)$, то $F = Q \wr Z$ также не принадлежит $f(p)$. При этом отметим, что Q и Z принадлежат формации $f(p)$. Возьмем еще одно регулярное сплетение $E = P \wr F$, где $|P| = p$. Тогда $E = P \wr F = V \rtimes F$, где V – база данного сплетения.

Рассмотрим группу $E = P \wr F = V \rtimes (W \rtimes Z)$. Так как Q и Z принадлежат формации $f(p)$, то подгруппы $R_1 = V \rtimes W$ и $R_2 = V \rtimes Z$ принадлежат формации $\mathfrak{F}$. Заметим, что R_1 и R_2 – субнормальные подгруппы в E и $E = R_1R_2$. По условию $\mathfrak{F}$ является формацией Фиттинга. Поэтому E принадлежит $\mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Остается принять, что G – циклическая группа простого порядка q. Вспомним, что $G \in g(p) \setminus f(p)$. Так как $f(p)$, $g(p)$ – наследственные формации и $\pi(f(p)) = \pi(g(p))$, то $G \in f(p)$. Получили окончательное противоречие. Следовательно, $f(p) = g(p)$ и импликация $(3) \Rightarrow (4)$ доказана.

Установим $(4) \Rightarrow (1)$. Пусть формация $\mathfrak{F}$ имеет разрешимый максимальный наследственный локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $f(p) = \varnothing$, если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F})$. Тогда по теореме 2.5 получаем, что формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию Кегеля. □

3 Заключительные замечания, дальнейшие направления исследований

Приведем обзор некоторых следствий из теоремы 2.6. Изучаемые нами разрешимые фор-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

мации со свойством $\mathcal{P}_2$ тесно связаны с хорошо известными формациями с условием Шеметкова.

Напомним (см., [5] или [1, с. 268]), формация $\mathfrak{F}$ называется формацией с условием Шеметкова (кратко, $\breve{S}$-формацией), если всякая ее минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.

Начало изучения таких формаций восходит к работе [16] В.Н. Семенчука и А.Ф. Васильева, в которой ими в классе $\mathfrak{S}$ было получено конструктивное описание всех наследственных насыщенных $\breve{S}$-формаций. В работе [17] А.Н. Скиба показал, что всякая разрешимая наследственная $\breve{S}$-формация является насыщенной.

***Следствие* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая наследственная $\breve{S}$-формация. Тогда $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathcal{P}_2$. Обратное утверждение неверно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая наследственная $\breve{S}$-формация. Из отмеченного выше результата А.Н. Скибы следует, что $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. Ввиду теоремы 3 из [16] (см., также [4, теорема 6.4.11]) $\mathfrak{F}$ имеет такой полный локальный экран *f*, что при любом $p \in \pi(\mathfrak{F})$ имеет место $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Теперь результат следует из теоремы 2.6. Нетрудно проверить, что разрешимая наследственная формация $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп обладает свойством $\mathcal{P}_2$, но она, очевидно, не является $\breve{S}$-формацией. Имеются также примеры разрешимых наследственных насыщенных не $\breve{S}$-формаций со свойством $\mathcal{P}_2$. Их нетрудно построить, используя результаты работы [18]. □

В качестве следствий из теоремы мы можем получить не только отмеченные выше известные результаты В. Хупперта и О. Кегеля, но и новые. Приведем некоторые из них.

Напомним, что $\mathfrak{F}$ называется решеточной формацией (см., например, [1, с. 248]), если множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в любой группе.

***Следствие* 3.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая наследственная насыщенная решеточная формация.Тогда $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathcal{P}_2$.*

В работе [19] В.С. Монахов ввел и изучил классы групп $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{D}$ с ограничениями на подгруппы Шмидта групп из этих классов. Класс $\mathfrak{R}$ содержит только те группы, у которых любая подгруппа Шмидта сверхразрешима. Класс состоит из всех групп с несверхразрешимыми подгруппами Шмидта. В работе доказано, что $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{D}$ являются разрешимыми наследственными формациями Фиттинга. В работе [20] доказано, что $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{D}$ являются формациями с условием Кегеля.

***Следствие* 3.3.** *Пусть группа $G = A_1A_2 \cdots A_n$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если в каждом произведении A_iA_j любая подгруппа Шмидта является сверхразрешимой, то и в G любая подгруппа Шмидта сверхразрешима.*

(2) *Если каждая подгруппа A_iA_j сверхразрешима, то любая подгруппа Шмидта группы G сверхразрешима.*

(3) *Если в каждом произведении A_iA_j любая сверхразрешимая подгруппа нильпотентна, то и в группе G любая сверхразрешимая подгруппа нильпонентна.*

Таким образом, в настоящей работе получено конструктивное решение отмеченной во введении проблемы. В дальнейшем нами планируется изучить разрешимые формации со свойством $\mathcal{P}_2$ в общем случае, с ослабленными свойствами наследственности или насыщенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ballester-Bolinches A*. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.

2. *Амберг*, *Б*. Конечные группы с кратными факторизациями / Б. Амберг, Л.С. Казарин, Б. Хефлинг // Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. – Т. 4, № 4. – С. 1251–1263.

3. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

4 *Ballester-Bolinches*, *A*. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006. – 385 p.

5. *Васильев*, *А.Ф*. К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1987. – Вып. 3. – С. 3–11.

6. *Васильев*, *А.Ф*. О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.

7. *Васильев*, *А.Ф*. О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.

8. *Васильев*, *А.Ф*. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.С. Вегера // Сиб. мат. журнал. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 259–275.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

9. *Kegel*, O.H. Zur Struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. – 1965. – Vol. 87, № 1. – S. 42–48.

10. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen. I / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – 794 s.

11. *Казарин*, Л.С. Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами // Укр. мат. журнал. – 1991. – Т. 34, № 7–8. – С. 947–950.

12. *Васильев*, *А.Ф*. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

13. *Васильев*, *А.Ф*. О перечислении локальных формаций с условием Кегеля / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 7. – С. 86–93.

14. *Ballester-Bolinches*, *A*. Finite trifactorized groups and formations / A. Ballester-Bolinches, A. Martinez-Pastor, M.C. Pedraza-Aguilera // J. Algebra. – 2000. – Vol. 226, № 2. – P. 990–1000.

15. *Ballester-Bolinches*, *A*. On formations with the Kegel property / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro // J. Group Theory. – 2005. – № 8. – P. 605–611.

16. *Семенчук*, *В.Н*. Характеризация локальных формаций $\mathfrak{F}$ по заданным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп / В.Н. Семенчук, А.Ф. Васильев // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 175–181.

17. *Скиба*, *А.Н*. Об одном классе локальных формаций конечных групп / А.Н. Скиба // Докл. Акад. наук БССР. – 1990. – Т. 34, № 11. – С. 382–385.

18. *Murashka*, *В.И*. Soluble formations with the Shemetkov property / V.I. Murashka // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 1 (22). – С. 82–87.

19. *Монахов*, *В.С*. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В.С. Монахов // Математические заметки. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 717–722.

20. *Васильев*, *А.Ф*. Арифметические графы и классы групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Сиб. мат. журнал. – 2019. – Т. 60, № 1. – С. 55–73.

Поступила в редакцию 08.10.19.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ