

В. А. БРИСКМАН

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 16 X 1975)

Переменные внешние воздействия, как известно, в определенных условиях не нарушают равновесие или течение несжимаемой жидкости, а приводят лишь к модуляции их параметров во времени. Такая модуляция может оказывать эффективное дестабилизирующее или стабилизирующее влияние на гидродинамическую устойчивость.

В предлагаемой статье рассматривается возможность предотвращения с помощью высокочастотной модуляции неустойчивости границы раздела несжимаемой жидкости (неустойчивость Кельвина — Гельмгольца, Тонкса — Френкеля и Рэлея — Тейлора). Показано, что всем трем задачам параметрической стабилизации присущи одни и те же характерные особенности.

Уравнения для малых возмущений плоской поверхности сводятся, как будет показано ниже, к уравнению типа Матве

$$\xi + 2\delta\xi + (\Omega^2 - q \cos \omega t)\xi = 0. \quad (1)$$

Поскольку нас здесь интересует возможность стабилизации абсолютно неустойчивых в отсутствие модуляции состояний, будем полагать, что в спектре значений параметра Ω^2 по крайней мере $\Omega_{\min}^2 < 0$.

Пусть частота модуляции гораздо больше обратного характерного времени развития наиболее опасного возмущения ($\omega^2 \gg |\Omega_{\min}^2|$). Тогда можно воспользоваться методом осреднения ⁽¹⁾. Представив решение в виде суперпозиции медленного движения и быстрых (с частотой внешнего воздействия) осцилляций малой амплитуды, для медленной части решения осреднением (1) получим уравнение колебаний с «эффективной собственной частотой», равной $(\Omega^2 + q^2/2\omega^2)$. Поэтому для устойчивости необходимо

$$q^2 \geq -2\omega^2\Omega_{\min}^2, \quad (2)$$

откуда следует, что высокочастотная стабилизация наиболее эффективна, когда $q \sim \omega^n$, где $n \geq 1$.

В задачах гидродинамической устойчивости встречаются две качественно разные ситуации, описываемые уравнением (1). Если при постоянных параметрах кроме нарастающих монотонных существуют затухающие колебательные возмущения, модуляция может привести к новому типу неустойчивости (кроме того, который имел место при $q=0$) — высокочастотному параметрическому резонансу. Считая амплитуду модуляции достаточно малой ($q \ll \Omega^2$), условие устойчивости по отношению к параметрическому возбуждению можно найти разложением решения уравнения (1) по q . С точностью до первого порядка малости имеем ⁽²⁾

$$q^2 \leq 4\delta^2\omega^2 + 4(\Omega^2 - \omega^2/4). \quad (3)$$

Таким образом, полная стабилизация в этом случае достигается в диапазоне амплитуд модуляции, достаточно больших, чтобы предотвратить исходную монотонную неустойчивость (условие (2)), но в то же время доста-

точно малых, чтобы не вызвать параметрический резонанс (условие (3)). При этом в связи с динамическим характером неустойчивости положение верхней границы определяется диссипацией. Именно такими особенностями отличается параметрическая стабилизация границы раздела несжимаемых сред.

Более простым является случай, когда в спектре собственных движений присутствуют только монотонные. Тогда, по крайней мере при малых амплитудах модуляции, параметрическое возбуждение невозможно, и для стабилизации достаточно выполнения условия (2). Известен пример такого типа стабилизации гидродинамической системы: при достаточно интенсивных вибрациях конвективная неустойчивость не возникает (3).

1. Рассмотрим устойчивость горизонтальной поверхности раздела двух параллельных потоков несмещающихся капельных жидкостей. Пренебрегая вязкостью, можно считать, что потоки однородны. Будем полагать, что скачок скорости на границе $\Delta u = u' - u$ превышает значение, начиная с которого тангенциальный разрыв неустойчив (штрихами будут обозначаться величины, относящиеся к верхней жидкости).

В качестве стабилизирующего фактора рассмотрим высокочастотную модуляцию ускорения свободного падения *

$$g - a\omega^2 \cos \omega t, \quad (4)$$

которая может быть вызвана, например, вертикальными колебаниями (вибрациями) с амплитудой a и частотой ω всей системы в целом. Модуляция (4) вследствие своей однородности не нарушает заданные течения.

Линеаризуя обычным образом уравнение Эйлера для потенциального движения, используя непрерывность нормальных напряжений и кинематические условия на границе, для амплитуды $\xi(t)$ малых возмущений поверхности вида $\xi(x, t) = \xi(t) \sin kx$ получим уравнение Матве (1) с $\delta = 0$. В системе отсчета, движущейся со скоростью $\mathbf{v} = (\rho\mathbf{u} + \rho'\mathbf{u}') / (\rho + \rho')$, имеем

$$\Omega^2 = k^3 + k - \frac{\rho'}{\rho} k^2 (\Delta u)^2, \quad q = a\omega^2 k. \quad (5)$$

Здесь для простоты положено $\rho' \ll \rho$, в качестве безразмерных единиц длины, времени и скорости выбраны соответственно комплексы

$$\left(\frac{\alpha}{\rho g} \right)^{1/2}, \quad \left(\frac{\alpha}{\rho g^3} \right)^{1/4}, \quad \left(\frac{g\alpha}{\rho} \right)^{1/4}, \quad (6)$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости, плоскость xu совпадает с невозмущенной поверхностью.

Минимизацией правой части неравенства (2) по k найдем условие подавления неустойчивости Кельвина — Гельмгольца

$$(a\omega) \geq 2 \left[\frac{(\Delta u)^2}{(\Delta u)_*^2} - 1 \right]^{1/2}, \quad (7)$$

где $(\Delta u)_* = (2\rho/\rho')^{1/2}$ — критическое значение для неустойчивости в отсутствие модуляции, получающееся из (1), (5) при $q = 0$. При этом критическим (как при $q = 0$, так и при $q \neq 0$) оказывается возмущение с волновым числом $k_* = 1$.

Поскольку спектр длин волн не ограничен, всегда имеются положительные значения Ω^2 , соответствующие колебательным возмущениям. Для вычисления порога (3) их параметрического возбуждения нужно, однако,

* Все результаты, полученные в статье, сохраняются, если под g понимать нормальное к поверхности раздела ускорение неинерциальной системы отсчета.

учесть вязкость. Приведем оценку, основывающуюся на том, что при высоких частотах главным членом в Ω^2 будет k^3 , т. е. собственная частота капиллярных волн. Подставляя декремент затухания этих волн $\delta=2\kappa k^2$ ($\kappa=\nu\rho^{1/2}g^{1/2}\alpha^{-3/4}$; ν — коэффициент кинематической вязкости) в (3) с точностью до первых не исчезающих членов разложения по малому параметру $\kappa k^2/\omega$, найдем

$$(a\omega) \leq (16\kappa^3\omega^2)^{1/3}, \quad k_* = \omega^{2/3}. \quad (8)$$

Заметим, что аналогичные оценки порога возбуждения неустойчивости, использованные в различных задачах о параметрическом резонансе в несжимаемой жидкости (см., например, (4)), хорошо соответствуют результатам экспериментов.

Вследствие зависимости порога параметрического возбуждения от частоты при достаточно больших частотах $\omega > \omega_*$ неравенства (7) и (8) становятся совместными. На рис. 1 приведена в качестве примера диаграмма устойчивости для случая, когда скачок скорости на границе воздух — четыреххлористый углерод вдвое превышает порог неустойчивости тангенциального разрыва $((\Delta u)/(\Delta u))_* = 2$; $\kappa = 4 \cdot 10^{-2}$. Выше прямой 1, соответствующей знаку равенства в (7), предотвращается возникновение неустойчивости Кельвина — Гельмгольца (размерное значение $(a\omega)_* = 23$ см/сек). Ниже кривой 2, соответствующей знаку равенства в (8), граница раздела устойчива по отношению к параметрическому возбуждению волн. В незаштрихованной на рисунке области достигается полная стабилизация ($f_* = \omega_*/2\pi = 1,2 \cdot 10^3$ гц).

2. Высокочастотные вибрации являются эффективным стабилизирующим фактором, поскольку при их действии амплитуда модуляции параметра состояния границы раздела растет с частотой ($q \sim a\omega^2$). Ранее численными методами были исследованы различные случаи предотвращения неустойчивости Рэлея — Тейлора с помощью вибраций ((5, 6) и др.). Можно показать, что и в этой задаче имеют место отмеченные выше особенности. Стабилизация наступает в диапазоне параметров

$$(16\kappa^3\omega^2)^{1/3} \geq (a\omega) \geq [2(k_{\min} - 1/k_{\min})]^{1/2}. \quad (9)$$

С помощью вибраций можно подавить также электрогидродинамическую неустойчивость поверхности проводящей жидкости, возникающую в сильном поле, нормальном к поверхности (неустойчивость Тонкса — Френкеля (7, 8)). Поскольку дисперсионные соотношения в этой задаче оказались такими же, как приведенные в п. 1, условия стабилизации получают-ся из (7), (8) путем замены $(\Delta u)^2\rho/\rho'$ на $2E^2$, где E — напряженность поля в единицах $(8\pi\alpha\text{rg})^{1/2}$.

3. Рассмотрим теперь возможность применения другого стабилизирующего фактора (не вибраций). Пусть ускорение свободного падения направлено по направлению внешней нормали к плоской свободной поверхности капельной жидкости. Тогда в отсутствие модуляции, очевидно, имеет место абсолютная неустойчивость Рэлея — Тейлора.

Внешнее электрическое или магнитное поле, касательное к границе раздела соответственно электро- или магнитополяризующихся неэлектропроводных сред, оказывает стабилизирующее действие на плоские возмущения, распространяющиеся вдоль вектора напряженности поля (9). Поэтому вращающееся поле может подавить возмущения любой ориента-

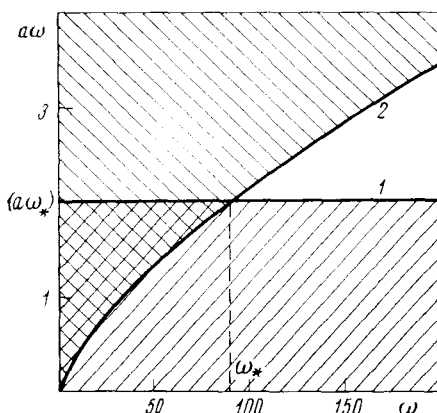


Рис. 1

ции ⁽¹⁰⁾, если период вращения будет гораздо меньше характерного времени развития возмущений *. Однако, поскольку для каждой точки поверхности поле будет периодической функцией времени $E=E_0 \cos \omega t$, как и в предыдущих задачах, следует учесть возможность параметрического резонанса.

Уравнениям Навье — Стокса, уравнению Лапласа для потенциала поля и граничным условиям, учитывающим непрерывность вязких и максвелловских напряжений, можно удовлетворить суперпозицией решений в отсутствие модуляции (вращения) поля. Для возмущений поверхности в приближении малой вязкости снова получается уравнение (1), в котором

$$\Omega^2 = k^3 - k + q, \quad q = k^2 \frac{(\varepsilon - 1)^2}{(\varepsilon + 1)} E_0^2, \quad \delta = 2\kappa k^2, \quad (10)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость (для определенности приняты обозначения, относящиеся к электрополяризующимся средам). Поскольку q оказалось не зависящим от ω , в высокочастотном приближении следует пренебречь q^2/ω^2 по сравнению с Ω^2 в условии (2). Однако стабилизация все-таки возможна вследствие зависимости среднего значения Ω^2 переменного параметра задачи от амплитуды модуляции q . Потребовав $\Omega^2 \geq 0$, из (10) получаем условие устойчивости

$$\frac{(\varepsilon - 1)^2}{(\varepsilon + 1)} E_0^2 \geq \left(\frac{1}{k} - k \right). \quad (11)$$

Правая часть (11) не имеет минимума по k . Поэтому неустойчивость Рэлея — Тейлора (в отличие от неустойчивостей Кельвина — Гельмгольца и Тонкса — Френкеля) можно подавить только на поверхности ограниченных размеров, для которой спектр k ограничен снизу ($k > k_{\min}$).

Диаграмма устойчивости аналогична изображенной на рисунке с той разницей, что в координатах E_0^2 , ω кривая 2 преобразуется в прямую

$$\frac{(\varepsilon - 1)^2}{(\varepsilon + 1)} E_0^2 = 8\kappa\omega, \quad (12)$$

получающуюся минимизацией условия (3).

Отдел физики полимеров
Уральского научного центра
Академии наук СССР
Пермь

Поступило
16 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. Л. Капица, ЖЭТФ, т. 21, в. 5 (1951). ² А. А. Андронов, М. А. Леонтович, ЖРФХО, т. 59, 430 (1927). ³ Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости, Физматгиз, 1972. ⁴ В. А. Брискман, Г. Ф. Шайдулов, ДАН, т. 180, № 6, 1315 (1968). ⁵ G. H. Wolf, Phys. Rev. Letters, v. 24, № 9, 444 (1970). ⁶ В. А. Брискман, А. А. Черепанов, В сб.: Гидродинамика, в. 5, Пермь, 1974. ⁷ L. Tonks, Phys. Rev., v. 48, 562 (1935). ⁸ Я. И. Френкель, ЖЭТФ, т. 6, в. 4, 347 (1936). ⁹ J. R. Melcher, Field — Coupled Surface Waves, Cambridge (Mass.), 1963. ¹⁰ В. А. Бучин, А. Г. Цылкин, ДАН т. 219, № 5, 1089 (1974). ¹¹ Ю. П. Ладиков, Мех. жидкости и газа, № 2, 8 (1967).

* Аналогичный магнитогидродинамический эффект стабилизации поверхности проводящей жидкости во вращающемся магнитном поле рассматривался в ⁽¹¹⁾.