

УДК 519.3+519.53

МАТЕМАТИКА

В. Л. ЛЕВИН

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ. ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫМИ СНИЗУ ОТНОСИТЕЛЬНО СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 2 VI 1975)

1°. Рассматриваются выпуклые функционалы

$$I: L_{\mathfrak{X}}^1 = L_{\mathfrak{X}}^1(T, \mathfrak{F}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\},$$

где $\mathfrak{X}$ — рефлексивное банахово пространство, $(T, \mathfrak{F}, \mu)$ — пространство с конечной положительной мерой и σ -алгебра $\mathfrak{F}$ полна относительно μ^* .

Пространство $L_{\mathfrak{X}}^1$ дополняемо во втором сопряженном пространстве $(L_{\mathfrak{X}}^1)''$. (В самом деле, $(L_{\mathfrak{X}}^1)'$ разлагается в прямую сумму двух своих подпространств, состоящих соответственно из абсолютно непрерывных и сингулярных функционалов на $L_{\mathfrak{X}}^1$ (1, 2). В рефлексивном случае $L_{\mathfrak{X}}^1 = (L_{\mathfrak{X}}^1)'$, а подпространство абсолютно непрерывных функционалов на $L_{\mathfrak{X}}^1$ отождествимо с $L_{\mathfrak{X}}^1$ **.)

Рассмотрим проектор $\Pi: (L_{\mathfrak{X}}^1)' = (L_{\mathfrak{X}}^1)'' \rightarrow L_{\mathfrak{X}}^1$, $\Pi(\lambda) = \bar{x}$, где $\bar{x}$ — абсолютно непрерывная составляющая λ . Нам понадобится следующий результат Бухвалова и Лозановского (3): для замкнутости по мере выпуклого множества $B \subset L_{\mathfrak{X}}^1$ необходимо, а если B ограничено по норме, то и достаточно, чтобы

$$B = \Pi(\text{cl } B), \quad (1)$$

где $\text{cl } B$ обозначает слабое* замыкание B в $(L_{\mathfrak{X}}^1)' = (L_{\mathfrak{X}}^1)''$. ***

Предложение 1. 1) Если функционал I полунепрерывен снизу по мере, то имеет место неравенство

$$I^{**}(\lambda) \geq I(\Pi(\lambda)) \quad \forall \lambda \in (L_{\mathfrak{X}}^1)', \quad (2)$$

где

$$I^{**}(\lambda) = \sup \{ \langle \bar{x}', \lambda \rangle - I^*(\bar{x}') : \bar{x}' \in L_{\mathfrak{X}}^1 \}, \\ I^*(\bar{x}') = \sup \{ \langle \bar{x}, \bar{x}' \rangle - I(\bar{x}) : \bar{x} \in L_{\mathfrak{X}}^1 \}.$$

2) Если функционал I слабо полунепрерывен снизу, множество $\text{dom } I = \{ \bar{x} \in L_{\mathfrak{X}}^1 : I(\bar{x}) < \infty \}$ ограничено по норме в $L_{\mathfrak{X}}^1$ и $M = \sup \{ I(\bar{x}) : \bar{x} \in \text{dom } I \} < \infty$, то условие (2) не только необходимо, но и достаточно для полунепрерывности снизу по мере функционала I .

Доказательство. Добавим к T несобственную точку $*$ и положим $\mu_1(A) = \mu(A)$ для $A \in \mathfrak{F}$, $\mu_1(*) = 1$. Отождествим $L_{\mathfrak{X}}^1 \times \mathbb{R}^1$ с пространством $L_{\mathfrak{X} \times \mathbb{R}}^1(\mu_1)$, относя паре $(\bar{x}, \alpha) \in L_{\mathfrak{X}}^1 \times \mathbb{R}^1$ элемент $\bar{z} \in L_{\mathfrak{X} \times \mathbb{R}}^1(\mu_1)$, где $z(t) = (x(t), 0)$ при $t \in T$ и $z(*) = (0, \alpha)$. Теперь все сводится к соотношению (1) для надграфика I и его пересечения с множеством $\{ (\bar{x}, \alpha) : \alpha \leq M \}$.

* Все результаты переносятся на случай, когда мера μ обладает свойством прямой суммы (см. (1)), если полунепрерывность и замкнутость рассматривать относительно топологии сходимости по мере на измеримых множествах конечной меры.

** Так как для рефлексивного $\mathfrak{X}$ всякая слабо измеримая функция $T \rightarrow \mathfrak{X}$ слабо μ -эквивалентна некоторой сильно измеримой функции.

*** В (3) этот результат был сформулирован для $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^1$; позже А. В. Бухвалов и Г. Я. Лозановский распространили его на общий случай.

Теорема 1. Выпуклый функционал I , полунепрерывный снизу по мере, достигает минимума на всяком замкнутом по мере и ограниченном по норме выпуклом множестве $B \subset L_{\mathbb{X}}^1$.

Доказательство. Множество $\text{cl } B \subset (L_{\mathbb{X}}^{\infty})'$ слабо* бикompактно, а функционал I^{**} слабо* полунепрерывен снизу. Следовательно, существует такая точка $\lambda_0 \in \text{cl } B$, что $I^{**}(\lambda_0) \leq I^{**}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \text{cl } B$. Тогда $\bar{x}_0 = \Pi(\lambda_0) \in B$ и в силу (2) $I(\bar{x}_0) \leq I^{**}(\lambda_0) \leq I(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in B$.

З а м е ч а н и е. Для конечномерного $\mathbb{X}$ теорема 1 следует также из одного результата Комлоша (4).

2°. Рассмотрим экстремальную задачу:

$$I(\bar{x}) \rightarrow \inf, \quad I_v(\bar{x}) \leq 0 \quad (v \in N) \quad \bar{x} \in B, \quad (3)$$

где $I, I_v, v \in N$, — выпуклые функционалы $L_{\mathbb{X}}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$, полунепрерывные снизу по мере, B — выпуклое множество в $L_{\mathbb{X}}^1$, замкнутое по мере и ограниченное по норме, N — произвольное множество. Предположим, что существует функция $\bar{x} \in \text{dom } I$, удовлетворяющая всем ограничениям задачи (3).

Предложение 2. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное множество $N(\varepsilon) \subset N$, что

$$\min\{I(\bar{x}) : I_v(\bar{x}) \leq 0 \quad (v \in N(\varepsilon)) \quad \bar{x} \in B\} > \min\{I(\bar{x}) : I_v(\bar{x}) \leq 0 \quad (v \in N), \bar{x} \in B\} - \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим $\alpha_0 = \min\{I(\bar{x}) : I_v(\bar{x}) \leq 0 \quad (v \in N), \bar{x} \in B\}$. (Минимум достигается в силу теоремы 1). Рассмотрим множества

$$B_v = \{\bar{x} \in B : I_v(\bar{x}) \leq 0\}, \quad v \in N,$$

$$B_0 = \{\bar{x} \in B : I(\bar{x}) \leq \alpha_0 - \varepsilon\}.$$

Их пересечение пусто по определению числа α_0 . Тогда в силу (1) $\text{cl } B_0 \cap \bigcap_{v \in N} \text{cl } B_v = \emptyset$. Поскольку множества $\text{cl } B_0, \text{cl } B_v, v \in N$, слабо* бикompактны, найдется конечное множество $N(\varepsilon)$, для которого $\text{cl } B_0 \cap \left(\bigcap_{v \in N(\varepsilon)} \text{cl } B_v\right) = \emptyset$. Следовательно, $B_0 \cap \left(\bigcap_{v \in N(\varepsilon)} B_v\right) = \emptyset$. Предложение доказано.

Теорема 2. Если $N = \{1, \dots, m\}$, то

$$\min_{\bar{x} \in B} \sup_{y \in \mathbb{R}_+^m} L(\bar{x}, y) = \sup_{y \in \mathbb{R}_+^m} \min_{\bar{x} \in B} L(\bar{x}, y),$$

где $\mathbb{R}_+^m = \{y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m : y_v \geq 0, v = 1, \dots, m\}$, $L(\bar{x}, y) = I(\bar{x}) + \sum_{v=1}^m y_v I_v(\bar{x})$ — функция Лагранжа задачи (3).

3°. Рассмотрим экстремальную задачу с операторными ограничениями

$$I(\bar{x}) \rightarrow \inf, \quad F_i(\bar{x}) \leq 0 \text{ п.в.}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \bar{x} \in B, \quad (4)$$

где $I(\bar{x}) = \int_T f_0(t, x(t)) \mu(dt)$, если $f_0(t, x(t)) \in L^1$, и $I(\bar{x}) = +\infty$ в противном случае; $F_i(\bar{x}) = f_i(t, x(t))$; функции $f_i: T \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$, $i = 0, 1, \dots, m$, выпуклы и полунепрерывны снизу по x ; функции $f_i(t, x(t))$, $i = 0, 1, \dots, m$, измеримы для всякой измеримой функции $\bar{x} = x(\cdot): T \rightarrow \mathbb{X}$ (для этого достаточно, чтобы f_i были нормальными выпуклыми интегрантами *); множество $B \subset L_{\mathbb{X}}^1$ выпукло, замкнуто по мере и ограничено по норме.

Теорема 3. Предположим, что: 1) $F_i(\bar{x}) \in L^{\infty} \quad \forall \bar{x} \in B, i = 1, \dots, m$; 2) существует функция $m_i(t) \in L^1$ такая, что $f_i(t, x(t)) \geq m_i(t)$ п.в. $\forall \bar{x} \in B, i = 0, 1, \dots, m$; 3) существует функция $\bar{x} \in \text{dom } I$, удовлетворяющая всем ограничениям задачи (4).

* Определение нормального выпуклого интегранта в несепарабельном случае см. в (1), § 6.

Тогда справедливо соотношение двойственности

$$\min_{\bar{x} \in B} \sup_{\bar{y} \in L_+^{1,m}} L(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_{\bar{y} \in L_+^{1,m}} \min_{\bar{x} \in B} L(\bar{x}, \bar{y}), \quad (5)$$

где $L_+^{1,m} = \{\bar{y} = (y_1(t), \dots, y_m(t)) \in L_{R^m}^1: y_i(t) \geq 0 \text{ п.в.}, i=1, \dots, m\}$,

$$L(\bar{x}, \bar{y}) = \int_T \left[f_0(t, x(t)) + \sum_{i=1}^m y_i(t) f_i(t, x(t)) \right] \mu(dt).$$

Если $T = S_1 \times \dots \times S_N$, $\bar{x} = R^{n_0} \times R^{n_1} \times \dots \times R^{n_N}$, $B = \{\bar{x} = (x_0, x_1(s_1), x_2(s_1, s_2), \dots, x_N(s_1, \dots, s_N)) \in C(s_1, \dots, s_N) \text{ п.в.}\}$, где $C: T \rightarrow 2^{\bar{x}}$ — измеримое многозначное отображение с компактными выпуклыми значениями, то задача (4) превращается в многошаговую задачу стохастического выпуклого программирования (см. (5-8)); при этом теорема 3 обобщает теорему 1 в (7) и теорему 3 в (8).

Доказательство. Из предположений и леммы Фату следует, что ограничения на B функционалов I и $L(\cdot, \bar{y})$ при $\bar{y} \in L_+^{1,m}$ полунепрерывны снизу по мере. Достижимость минимумов в (5) вытекает из теоремы 1. Рассмотрим функцию возмущения $\varphi(\bar{u}) = \min\{I(\bar{x}): F_i(\bar{x}) \leq u_i \text{ п.в.}, i=1, \dots, m, \bar{x} \in B\}$, $\bar{u} = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in L_{R^m}^\infty$. Для всякого числа α множество $U(\alpha) = \{\bar{u}: \varphi(\bar{u}) \leq \alpha\}$ есть проекция на $L_{R^m}^\infty$ множества $Q(\alpha) = \{(\bar{u}, \bar{x}): I(\bar{x}) \leq \alpha, F_i(\bar{x}) \leq u_i \text{ п.в.}, i=1, \dots, m\}$. Из предположений и леммы Фату следует замкнутость $Q(\alpha)$ относительно произведения топологии $\sigma(L_{R^m}^\infty, L_{R^m}^1)$ в $L_{R^m}^\infty$ и топологии сходимости по мере в $L_{R^m}^1$.

Пусть $\bar{u} = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ есть $\sigma(L_{R^m}^\infty, L_{R^m}^1)$ -предел некоторой сети (обобщенной последовательности) $\{\bar{u}^\nu\} \subset U(\alpha)$. Найдутся такие $\bar{x}^\nu \in L_{R^m}^1$, что $(\bar{u}^\nu, \bar{x}^\nu) \in Q(\alpha)$. Поскольку $\bar{x}^\nu \in B \subset \text{cl } B$, а $\text{cl } B$ слабо* бикompактно, найдется подсеть $\bar{x}^{\nu'}$, слабо* сходящаяся к некоторому функционалу $\lambda \in \text{cl } B$. Тогда $\bar{x} = \Pi(\lambda) \in B$. Функционал J на $L_{R^m}^1$, совпадающий с I на B и равный $+\infty$ вне B , полунепрерывен снизу по мере, а функционал J^* на $(L_{R^m}^1)'' = (L_{R^m}^1)'$ слабо* полунепрерывен снизу. Применяя предложение 1, получаем

$$I(\bar{x}) = J(\bar{x}) \leq J^*(\lambda) \leq \liminf_{\nu} J^*(\bar{x}^{\nu'}) = \liminf_{\nu} I(\bar{x}^{\nu'}) \leq \alpha.$$

Аналогично проверяется, что

$$\begin{aligned} \int_T f_i(t, x(t)) y(t) \mu(dt) &\leq \liminf_{\nu} \int_T f_i(t, x^{\nu'}(t)) y(t) \mu(dt) \leq \\ &\leq \lim_{\nu} \int_T u_i^{\nu'}(t) y(t) \mu(dt) = \int_T u_i(t) y(t) \mu(dt) \quad \forall y(t) \in L_+^1, \end{aligned}$$

т. е. $F_i(\bar{x}) \leq u_i$ п.в., $i=1, \dots, m$. Итак, $(\bar{u}, \bar{x}) \in Q(\alpha)$, следовательно, $\bar{u} \in U(\alpha)$, т. е. функция $\varphi: \sigma(L_{R^m}^\infty, L_{R^m}^1)$ -полунепрерывна снизу. Отсюда стандартным образом следует соотношение двойственности (5).

Теорема 4. Пусть в дополнение к условиям теоремы 3 $\bar{x}$ сепарабельно, f_i , $i=0, 1, \dots, m$, суть нормальные выпуклые интегранты, а $B = \{\bar{x} \in L_{R^m}^1: x(t) \in C(t) \text{ п.в.}\}$, где $C: T \rightarrow 2^{\bar{x}}$ — измеримое многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми значениями и $\psi(t) = \sup\{\|x\|: x \in C(t)\} \in L^1$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\min_{\bar{x} \in B} L(\bar{x}, \bar{y}) = I_g(\bar{y}) \quad \forall \bar{y} \in L_+^{1,m}$, где $I_g(\bar{y}) = \int_T g(t, y(t)) \mu(dt)$, если $g(t, y(t)) \in L^1$, и $I_g(\bar{y}) = -\infty$ в противном случае,

$$g(t, y) = \begin{cases} \inf_{x \in C(t)} \left[f_0(t, x) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(t, x) \right] & \text{при } y \in R_+^m, \\ -\infty & \text{при } y \notin R_+^m; \end{cases}$$

2) функционал I_g вогнут и полунепрерывен сверху по мере на $L_{\mathbf{R}^m}^1$;

3) если функция $\bar{x}_* \in \text{dom } I$ удовлетворяет условию Слейтера: $\bar{x}_* \in B$, $F_i(\bar{x}_*) \leq -\varepsilon < 0$ п.в., $i=1, \dots, m$, то множества уровня $\{\bar{y} \in L_{\mathbf{R}^m}^1: I_g(\bar{y}) \geq \alpha\}$ ограничены по норме. В этом случае функционал I_g достигает своего максимума на $L_{\mathbf{R}^m}^1$, а функция L обладает седловыми точками:

$$\min_{\bar{x} \in B} \max_{\bar{y} \in L_{+}^{1,m}} L(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{\bar{y} \in L_{+}^{1,m}} \min_{\bar{x} \in B} L(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{\bar{y} \in L_{\mathbf{R}}^1} I_g(\bar{y}).$$

З а м е ч а н и е. Легко показать, что при условиях теоремы 4 пара $(\bar{x}^0, \bar{y}^0)$ является седловой точкой L тогда и только тогда, когда $(x^0(t), (y^0(t)))$ — седловая точка функции

$$H^t(x, y) = f_0(t, x) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(t, x), \quad x \in C(t), \quad y \in \mathbf{R}_+^m,$$

для почти всех $t \in T$.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
27 V 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Л. Левин, УМН, т. 30, № 2, 115 (1975). ² В. Л. Левин, Функциональный анализ и его приложения, т. 8, № 4, 48 (1974). ³ А. В. Бухвалов, Г. Я. Лозановский, ДАН, т. 212, № 6, 1273 (1973). ⁴ J. Komlos, Acta Math. Sci. Hung., v. 18, 217 (1967). ⁵ Е. Б. Дынкин, Матем. сб., т. 87 (129); № 4, 490 (1972). ⁶ Е. В. Dynkin, In: Mathematical Models in Economics, Warszawa, 1974, p. 207. ⁷ R. T. Rockafellar, In: Colloque d'Analyse Convexe 1974, 1975. ⁸ R. T. Rockafellar, R. J. B. Wets, Pacific J. Math., in press.