

УДК 518.733.431

МАТЕМАТИКА

Ю. С. ОСИПОВ, С. П. ОХЕЗИН

К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 17 X 1975)

Предлагается математическая формализация задачи об управлении параболической системой в условиях конфликта или неопределенности. Задача трактуется как дифференциальная игра в подходящем функциональном пространстве. Указываются альтернативные условия разрешимости и способ построения искомых управлений, играющий здесь роль принципа экстремального прицеливания Н. Н. Красовского ⁽¹⁾. Работа примыкает к исследованиям ⁽¹⁻¹²⁾.

1. Пусть Ω — ограниченная область в n -мерном евклидовом пространстве E_n , Γ — ее граница — дважды непрерывно дифференцируемое $(n-1)$ -мерное многообразие, локально расположенное по одну сторону от Ω ; $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Задана управляемая параболическая система

$$\partial y / \partial t = Ay + f \quad \text{в} \quad Q = \Omega \times (t_0, \vartheta), \quad (1)$$

$$y|_{t=t_0} = y_0, \quad y|_{\Sigma} = u - v \quad \text{в} \quad \Sigma = \Gamma \times [t_0, \vartheta];$$

здесь при каждом t функция $y(t, x) = y_t(\cdot)$ — состояние системы;

$$Ay = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right), \quad a_{ij} = a_{ji},$$

a_{ij} — дважды непрерывно дифференцируемы на $\bar{\Omega}$, причем

$$\exists v = \text{const} > 0 \quad \forall x \in \Omega$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq v (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2), \quad \forall (\xi_1, \dots, \xi_n) \in E_n;$$

$y_0 \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ — заданное начальное состояние, $f \in \mathcal{L}_2(Q)$ — заданное возмущение; u, v — управления, стесненные условиями: $u \in \mathcal{E}_1([t_0, \vartheta])$, $v \in \mathcal{E}_2([t_0, \vartheta])$, где $\mathcal{E}_i$ — выпуклые ограниченные замкнутые множества из $\mathcal{L}_\infty(\Sigma)$.

Задано ограниченное слабо замкнутое множество $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}_2(\Omega)$.

Зная в каждый текущий момент процесса управления реализующееся к этому моменту состояние системы (1), требуется указать такой способ формирования воздействия u (воздействия v), что, каков бы ни был способ формирования воздействия v (воздействия u), вырабатывающий реализацию $v[t, x]$ ($u[t, x]$) из $\mathcal{E}_2$ (из $\mathcal{E}_1$), выполняются условия:

1) $y_0(\cdot) \in \mathcal{M}$ ($y_0(\cdot) \notin \mathcal{M}$),

2) реализация управления u (управления v) содержится в $\mathcal{E}_1$ (в $\mathcal{E}_2$).

Таким образом, в сформулированных задачах речь идет о построении искомых граничных управлений по принципу обратной связи. Аналогичные вопросы для параболических систем изучались в ^(8, 9), где рассмотрен случай распределенных управлений. Отметим, что в обсуждае-

мом здесь случае граничных управляющих воздействий возникают дополнительные (по сравнению с ^(8, 9)) трудности принципиального характера, связанные с характером зависимости решений уравнения (1) от краевых условий в метрике выбираемого пространства состояний.

Уточним постановку задач. Будем называть состоянием системы (1) всякий элемент $y \in \mathcal{L}_2(\Omega)$. Пусть $\mathcal{E}_i(q)$, $i=1, 2$, означает совокупность всех функций, каждая из которых есть сужение по t на промежуток $q \subset [t_0, \theta]$ некоторой функции из $\mathcal{E}_i([t_0, \theta])$, $i=1, 2$. Стратегией U назовем (см. ⁽⁸⁾) правило, ставящее в соответствие каждой тройке $\{y, t_1, t_2\}$, где $y \in \mathcal{L}_2(\Omega)$, $t_0 \leq t_1 < t_2 \leq \theta$, непустое множество $U(y, t_1, t_2) \subset \mathcal{E}_1([t_1, t_2])$. Аналогичным образом определяется стратегия V . Пусть Δ — конечное разбиение $[t_*, \theta]$ точками τ_i , $i=1, \dots, m(\Delta)$, $\tau_i < \tau_{i+1}$, $\tau_0 = t_*$, $\tau_m = \theta$, и $\delta(\Delta) = \max_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$.

Функцию $y_t(x)_\Delta = y(x, t; t_*, y_*, U)_\Delta$, $t_* \leq t \leq \theta$, $x \in \Omega$, принадлежащую пространству $\mathcal{L}_2([t_*, \theta], \mathcal{L}_2(\Omega))$ (см. ⁽¹³⁾), назовем движением системы (1) из состояния y_* , если (см. ^(10, 13))

$$\begin{aligned} - \int_{t_*}^{\theta} \int_{\Omega} y_t(x)_\Delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A \varphi \right) dx dt &= \int_{t_*}^{\theta} \int_{\Omega} f \varphi dx dt + \int_{\Omega} y_*(x) \varphi(x, t_*) dx - \\ &- \int_{t_*}^{\theta} \int_{\Gamma} (u[t, x] - v[t, x]) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_A} d\Gamma dt \end{aligned}$$

при всех $\varphi \in \Phi = \{\varphi | \varphi \in H^{2,1}(\Omega \times [t_*, \theta]), \varphi|_x = 0, \Sigma = \Gamma \times [t_*, \theta], \varphi(x, \theta) = 0\}$. Здесь на $[\tau_i, \tau_{i+1})$ управление $u[t, x] \in U(y_{\tau_i}(\cdot)_\Delta, \tau_i, \tau_{i+1})$, $v[t, x] \in \mathcal{E}_2([t_*, \theta])$; $\partial \varphi / \partial \nu_A$ — производная φ в силу A по нормали ν к Γ , внешней для Ω ; $H^{2,1}(\Omega \times [t_*, \theta]) = \{\varphi | \varphi, \partial \varphi / \partial t, \partial \varphi / \partial x_i, \partial^2 \varphi / \partial x_i \partial x_j \in \mathcal{L}_2(\Omega \times [t_*, \theta]), i, j=1, \dots, n\}$.

Аналогичным образом определяются движения $y(x, t; t_*, y_*, V)_\Delta$. Множество введенных движений непусто ⁽¹³⁾.

Исходные задачи формализуются следующим образом. Пусть $\mathcal{M}^\varepsilon$ — замкнутая ε -окрестность $\mathcal{M}$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$.

Задача сближения. Требуется построить стратегию U со свойством: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_0 > 0 \forall y_t(x)_\Delta = y(t, x; t_0, y_0, U)_\Delta$ имеем $y_\theta(x)_\Delta \in \mathcal{M}^\varepsilon$, если только $\delta(\Delta) \leq \delta_0$.

Задача уклонения. Требуется построить стратегию V со свойством: $\exists \varepsilon > 0 \exists \delta_0 > 0 \forall y_t(x)_\Delta = y(t, x; t_0, y_0, V)_\Delta$ имеем $y_\theta(x) \notin \mathcal{M}^\varepsilon$, если только $\delta(\Delta) \leq \delta_0$.

Укажем условия разрешимости этих задач. Пусть ω_j, λ_j , $j=1, 2, \dots$, — решения спектральной задачи $-A\omega = \lambda\omega$, $\omega|_\Gamma = 0$ в пространстве $H^{1,0}(\Omega) = \{\varphi | \varphi, \partial \varphi / \partial x_i \in \mathcal{L}_2(\Omega), i=1, \dots, n\}$. Введем

Условие 1. При любом $t \in (t_0, \theta]$, $i=1, 2$, множество

$$G_i(t) = \left\{ z \in \mathcal{L}_2(\Omega) | z = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \int_{t_0}^t e^{-\lambda_j(t-\tau)} \int_{\Gamma} w \frac{\partial \omega_j}{\partial \nu} d\Gamma d\tau, w \in \mathcal{E}_i([t_0, t]) \right\}$$

компактно в $\mathcal{L}_2(\Omega)$.

Будем обозначать символом V_0 стратегию V , полупрерывную сверху по y в следующем смысле: $\forall y_n \rightarrow y$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$, $\forall v_n \rightarrow v$ в $\mathcal{L}_2(\Gamma \times [t_1, t_2])$, $v_n \in V(y_n, t_1, t_2)$, имеем $v \in V(y, t_2, t_2)$. Пусть $\mathcal{H}_{t_*}$ — совокупность всех $y_* \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ со свойством: $\forall \varepsilon > 0, \forall V_0, \forall \delta_0 > 0 \exists y_t(x)_\Delta = y(t, x; t_*, y_*, V_0)_\Delta$ с $\delta(\Delta) \leq \delta_0$, для которого $y_\theta(x)_\Delta \in \mathcal{M}^\varepsilon$. $\mathcal{H}_t$ — аналог множеств позиционного поглощения из ^(1, 5, 7-9).

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1. Для любого начального состояния y_0 разрешима либо задача сближения, либо задача уклонения. Задача сближения (уклонения) разрешима тогда и только тогда, когда $y_0 \in \mathcal{H}_{t_0}$ ($y_0 \notin \mathcal{H}_{t_0}$).

Таким образом, как и в случаях систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (¹, ⁵), дифференциальными уравнениями с последействием (⁶, ⁷), дифференциальными уравнениями в гильбертовых пространствах с неограниченным оператором, порождающим сильно непрерывную подгруппу (⁸, ⁹), в рассматриваемой проблеме сближения — уклонения установлено существование ситуации равновесия типа седловой точки. В основе доказательства теоремы 1 лежит способ построения стратегии сближения, играющий здесь роль принципа экстремального прицеливания Н. Н. Красовского (⁴). Опишем этот способ.

Пусть имеется совокупность непустых множеств $N_t \subset \mathcal{L}_2(\Omega)$, $t_0 \leq t \leq \theta$. Пусть α_j , $j=1, 2, \dots$, — произвольные числа, удовлетворяющие условиям

$$0 < \alpha_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \left\| \frac{\partial \omega_j}{\partial v_A} \right\|_{\mathcal{L}_2(\Gamma)}^2 < \infty.$$

Такие числа α_j , очевидно, существуют, так как по теореме о следах (¹⁴) $\partial \omega / \partial v_A \in \mathcal{L}_2(\Gamma)$. Обозначим

$$J_\alpha(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \langle y, \omega_j \rangle,$$

$$J(u, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \langle y, \omega_j \rangle \int_{t_1}^{\infty} \int_{\Gamma} e^{-\lambda_f(2t_2 - t_1 - t)} \frac{\partial \omega_j}{\partial v} u \, d\Gamma \, dt.$$

Пусть $U^e(y, t_1, t_2)$ — совокупность всех $u \in \mathcal{E}_1([t_1, t_2])$ со свойством: $\exists \{u_i\} \rightarrow u$ в $\mathcal{L}_2(\Gamma \times [t_1, t_2])$, $u_i \in \mathcal{E}_1([t_1, t_2])$; $\exists \{y_i\} \rightarrow y$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$; $\exists \{z_i\} \subset \mathcal{N}_{t_1}$, такие, что

$$J_\alpha(y - z_i) \rightarrow \inf \{J_\alpha(y - z), z \in \mathcal{N}_{t_1}\},$$

$$J(u_i, y_i - z_i) = \max \{J(w, y_i - z_i), w \in \mathcal{E}_1([t_1, t_2])\}.$$

Можно показать, что множества $U^e(y, t_1, t_2)$ непусты.

Стратегию U^e , следуя (¹), назовем экстремальной к множествам $\mathcal{N}_{t_1}$, $t_0 \leq t \leq \theta$. Аналогичным образом определяем стратегию V^e . Справедлива

Теорема 2. Пусть выполнено условие 1. Если $\mathcal{H}_{t_0} \neq \emptyset$, то $\mathcal{H}_t \neq \emptyset$ при любом $t \in [t_0, \theta]$. Если разрешима задача сближения, то ее решает стратегия U^e , экстремальная к множествам $\mathcal{H}_{t_1}$, $t_0 \leq t \leq \theta$.

Замечания. 1) Стратегию, решающую задачу уклонения, можно также построить в форме стратегии, экстремальной к некоторой системе множеств из $\mathcal{L}_2(\Omega)$.

2) Используя критерий компактности в пространстве с базисом, можно проверить, что условие 1 выполняется, например, в случае $\mathcal{E}_1([t_0, \theta]) = \{w | w = a_i(x, t)p(t), a_i \in C^2(\bar{Q}), \alpha_i \leq p \leq \beta_i, p \in \mathcal{L}_\infty([t_0, \infty]), \alpha_i, \beta_i = \text{const}\}$, $i=1, 2$.

3) Как и в (¹, ⁵, ⁷, ¹²), можно выделить широкий класс множеств $\mathcal{E}$, и $\mathcal{M}$, для которых $\mathcal{H}_t$ допускают эффективное описание (в форме системы линейных неравенств в $\mathcal{L}_2(\Omega)$).

4) Аналогичные построения можно провести для случая смешанного краевого условия $\alpha u + \partial u / \partial v_A|_{\Sigma} = u - v$.

5) Ограничения на Ω , Γ , a_{ij} приняты для краткости изложения. Они допускают существенное ослабление в соответствии с ⁽¹³⁾. Заметим, наконец, что введение параметров α_j обусловлено тем, что для отклонений $\varepsilon[t]$ движений системы (1) от множеств $\mathcal{H}_t$, измеренных в метрике $\mathcal{L}_2(\Omega)$, не имеет, вообще говоря, место оценка

$$\varepsilon^2[t+\delta] \leq (1+\lambda\delta) \varepsilon^2[t] + o(\delta),$$

лежащая в основе построений из ^(1, 5-8). Однако такую оценку удастся получить в метрике $\|y\|_\alpha = (J_\alpha(y))^{1/2}$.

Институт математики и механики
Уральского научного центра Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
15 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н. Красовский, Техническая кибернетика, № 5 (1969); № 1 (1970). ² Л. С. Понтрягин, ДАН, т. 174, № 6 (1967); т. 175, № 4 (1967). ³ Е. Ф. Мищенко, Техническая кибернетика, № 5 (1971). ⁴ Б. Н. Пшеничный, ДАН, т. 184, № 2 (1968). ⁵ Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, Позиционные дифференциальные игры, «Наука», 1974. ⁶ Н. Н. Красовский, Ю. С. Осипов, ДАН, т. 197, № 4 (1971). ⁷ Ю. С. Осипов, ДАН, т. 196, № 4 (1971). ⁸ Ю. С. Осипов, Дифференциальные игры в системах с распределенными параметрами. Тез. III Всесоюзн. конфер. по теории игр, Одесса, 1974. ⁹ Ю. С. Осипов, ДАН, т. 206, № 6 (1975). ¹⁰ Ж.-Л. Лионс, Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, М., «Мир», 1972. ¹¹ Ю. В. Егоров, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., в. 3 (1963). ¹² Ю. С. Осипов, В сб.: Управляемые системы, Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, в. 8, 1971. ¹³ О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», 1967. ¹⁴ Ж.-Л. Лионс, Е. Мадженесс, Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., «Мир», 1971.