

Б. В. ПАЛЬЦЕВ

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ КАНОНИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 29 IX 1975)

Пусть Γ — простой замкнутый гладкий положительно ориентированный контур (гладкая линия, состоящая из конечного числа таких непересекающихся контуров см. ⁽¹⁾), разбивающий комплексную плоскость на две области: внутреннюю (ограниченную) D^+ и внешнюю D^- , дополняющую $D^+ \cup \Gamma$ до всей комплексной плоскости.

Как хорошо известно (см. ⁽¹⁻³⁾), однородная задача Гильберта состоит в нахождении вектора $\varphi(z) = \{\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)\}$, голоморфного в областях D^+ и D^- , такого, что его предельные значения $\varphi^+(\xi)$ и $\varphi^-(\xi)$ на контуре Γ из D^+ и D^- соответственно удовлетворяют на Γ условию сопряжения

$$\varphi^+(\xi) = G(\xi) \varphi^-(\xi) \quad \forall \xi \in \Gamma, \quad (1)$$

где $G(\xi)$ — некоторая матрица, определенная на Γ . Основным понятием при изучении структуры решений задачи Гильберта является понятие канонической матрицы решений (к.м.р.) однородной задачи (см. ⁽¹⁻³⁾), т.е. матрицы $\Phi(z)$, голоморфной в D^+ и D^- , непрерывной в $D^+ \cup \Gamma$ и $D^- \cup \Gamma$, являющейся решением задачи (1) и удовлетворяющей следующим двум условиям:

1°) $\det \Phi(z) \neq 0$ в $D^+ \cup \Gamma$ и в $D^- \cup \Gamma$;

2°) вектор-столбцы $\overset{1}{\varphi}(z), \dots, \overset{n}{\varphi}(z)$ матрицы $\Phi(z)$ имеют при $z \rightarrow \infty$ поведение $\overset{k}{\varphi}(z) = az^{-\kappa_k} + o(|z|^{-\kappa_k})$, $k=1, \dots, n$, где a — некоторые постоянные векторы, κ_k — целые числа, $\det \|a, \dots, a\| \neq 0$. Числа $\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_n$ не зависят от выбора матрицы $\Phi(z)$ и называются частными индексами задачи (1).

Фундаментальный результат относительно существования к.м.р. задачи (1) был установлен в работах И. Племели и в ⁽¹⁻³⁾: если $G(\xi) \in H_\alpha(\Gamma)$ — пространству функций, непрерывных по Гельдеру на Γ с показателем α , $0 < \alpha \leq 1$, и

$$\det G(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \Gamma, \quad (2)$$

то у задачи (1) существует к.м.р.; кроме того, $\Phi^\pm(\xi) \in H_\alpha(\Gamma)$ с тем же самым α , если $0 < \alpha < 1$.

Некоторые другие признаки существования к.м.р. или, что эквивалентно, существования левой стандартной факторизации матрицы $G(\xi)$ были получены в ^(4, 5). Так, например, в ⁽⁴⁾ установлено: если Γ представляет собой единичную окружность $|\xi|=1$, а $G(\xi)$ удовлетворяет (2) и разлагается на Γ в абсолютно сходящийся ряд Фурье, то $G(\xi)$ допускает левую и правую стандартные факторизации, а потому задача (1) имеет к.м.р. Там же получен и континуальный (т.е. для случая, когда Γ — вещественная ось) аналог этого признака. Отметим, что признаки, приведенные в ⁽⁵⁾, в основном трудно проверяемые.

Хорошо также известно, что одно лишь требование непрерывности $G(\xi)$ и выполнение условия (2) не обеспечивают еще существования к.м.р. в сформулированном выше смысле. Поэтому представляет интерес задача описания возможных других более широких и достаточно простых для проверки признаков существования к.м.р. Автор столкнулся с необходимостью знания таких признаков при разработке одного метода решения интегральных уравнений свертки на конечном интервале с символами, имеющими точки ветвления логарифмического характера, кратко описанного в (6).

В настоящей работе мы сформулируем простой признак существования к.м.р., являющийся обобщением упомянутого классического признака (1-3), и наметим схему этого доказательства.

О п р е д е л е н и е 1. Обозначим через $H(\ln^{-\lambda}; \Gamma)$, где $\lambda > 0$, банахово пространство непрерывных на Γ функций (вектор-функций, матриц-функций) $\varphi(\xi)$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{H(\ln^{-\lambda}; \Gamma)} = \max_{\xi \in \Gamma} |\varphi(\xi)| + \sup_{\xi_1, \xi_2 \in \Gamma} |\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)| (|\ln|\xi_1 - \xi_2|| + 1)^\lambda. \quad (3)$$

Очевидно, $H(\ln^{-\lambda}; \Gamma)$, элементы которого либо функции, либо матрицы-функции, является также алгеброй, причем, если $\varphi(\xi) \in H(\ln^{-\lambda}; \Gamma)$ и $\varphi(\xi) \neq 0$ (для матриц $\det \varphi(\xi) \neq 0$) при всех $\xi \in \Gamma$, то $\varphi^{-1}(\xi) \in H(\ln^{-\lambda}; \Gamma)$.

Т е о р е м а 1 (основной результат). Если $G(\xi) \in H(\ln^{-\lambda}; \Gamma)$ с некоторым $\lambda > 1$ и выполнено условие (2), то задача (1) имеет к.м.р. $\Phi(z)$ в сформулированном выше смысле. Предельные значения $\Phi^\pm(\xi)$ к.м.р. из $D^\pm$ на Γ принадлежат $H(\ln^{-(\lambda-1)}; \Gamma)$.

Схема доказательства этой теоремы полностью следует классическим построениям, приведенным в (2), стр. 14-32. При проведении этой схемы в условиях теоремы 1 существенным моментом было использование следующих пространств функций на Γ .

О п р е д е л е н и е 2. Скажем, что функция (вектор-функция) $\varphi(\xi)$ принадлежит пространству $H_A(\ln^{-\lambda}; \Gamma)$, где $\lambda > 0$, если $\varphi(\xi)$ непрерывна на Γ и для каждой $\xi_0 \in \Gamma$ имеет место разложение

$$\varphi(\xi) = A^\pm(\xi; \xi_0) + \psi^\pm(\xi; \xi_0), \quad (4)$$

в котором $A^\pm(\xi; \xi_0)$ при фиксированном ξ_0 являются граничными значениями из $D^\pm$ на Γ функций $A^\pm(z; \xi_0)$, голоморфных в $D^\pm$ и непрерывных в $D^\pm \cup \Gamma$, и, кроме того, для $A^\pm(\xi; \xi_0)$ и $\psi^\pm(\xi; \xi_0)$ выполнены следующие условия:

1) Существует постоянная $C > 0$, зависящая только от φ , такая, что $|A^-(z; \xi_0)| \leq C \quad \forall z \in D^- \cup \Gamma, \forall \xi_0 \in \Gamma$;

2) обозначим через $v_\pm(\xi_0)$ вектор (комплексное число) единичной нормали к Γ в точке ξ_0 , направленной в $D^\pm$. Существует ω , зависящее также только от φ , $0 < \omega < \pi/2$, такое, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, \omega) > 0$, так что $\forall z \in D^\pm, \forall \xi_0 \in \Gamma$, удовлетворяющих $|z - \xi_0| \leq \delta(\varepsilon, \omega), \quad |\arg v_\pm(\xi_0) - \arg(z - \xi_0)| \leq \omega$, выполняется неравенство $|A^\pm(z; \xi_0) - A^\pm(\xi_0; \xi_0)| \leq \varepsilon$;

3) существует постоянная M , зависящая только от φ , такая, что $\forall \xi, \xi_0 \in \Gamma$ выполняется $|\psi^\pm(\xi; \xi_0)| \leq M(|\ln|\xi - \xi_0|| + 1)^{-\lambda}$.

Очевидно, $H(\ln^{-\lambda}; \Gamma) \subset H_A(\ln^{-\lambda}; \Gamma)$ и $H_A(\ln^{-\lambda}; \Gamma)$ является также алгеброй (для случая функций).

Анализируя схему доказательства в (2), нетрудно убедиться, что теорема 1 будет доказана, если мы покажем справедливость следующих утверждений.

А. Если $\varphi(\xi) \in H_A(\ln^{-\lambda}; \Gamma)$ с $\lambda > 1$, то интеграл типа Коши

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (5)$$

непрерывно продолжим на Γ из $D^\pm$ и для предельных значений $J^\pm(\xi)$ справедливой формулы Сохоцкого — Племели.

Б. Всякое решение $\varphi(\xi)$, принадлежащее $L_\infty(\Gamma)$, любого из интегральных уравнений

$$(I \mp K)\varphi = f, \quad (I \mp K')\varphi = f \quad (6)$$

с $f \in H(\ln^{-\lambda}; \Gamma)$, в которых I — единичный оператор, а

$$(K\varphi)(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G^{-1}(\xi)G(\tau) - E}{\tau - \xi} \varphi(\tau) d\tau, \\ (K'\varphi)(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G'(\xi)G'^{-1}(\tau) - E}{\tau - \xi} \varphi(\tau) d\tau, \quad (7)$$

где E — единичная матрица, $G'(\xi)$ — транспонированная к $G(\xi)$, принадлежит на самом деле $H_A(\ln^{-\mu}; \Gamma)$ для любого μ , $0 < \mu < \lambda$.

Уравнения (6) являются интегральными уравнениями, соответствующими задачам: задаче (1), сопутствующей (1), сопутствующей союзной и союзной.

В. Для уравнений (6) справедлива альтернатива Фредгольма в следующем усиленном смысле: уравнение $(I \mp K)\varphi = f$, $f \in C(\Gamma)$ ($C(\Gamma)$ — пространство непрерывных функций), разрешимо в $C(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $\int_{\Gamma} f(\xi)\varphi(\xi) d\xi = 0$ для любого $\varphi(\xi)$, являющегося решением $C(\Gamma)$ союзного однородного уравнения $(I \mp K')\varphi = 0$ (аналогично для остальных уравнений).

Г. Справедливо утверждение, сформулированное в (2) (в конце стр. 28) для точек, расположенных на Γ .

Утверждение А легко устанавливается при помощи лемм 1 и 2. Предварительно дадим определение.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $\varphi(\xi)$ — некоторая функция, определенная в $D^\pm$, ω — некоторое число, $0 \leq \omega < \pi/2$. Мы скажем, что $\varphi(z)$ имеет равномерный предел $\varphi^\pm(\xi)$ из $D^\pm$ на Γ по направлениям, отклоняющимся от нормальных на угол, не больший ω , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, \omega) > 0$ так, что $\forall z \in D^\pm$, $\forall \xi \in \Gamma$, удовлетворяющих $|z - \xi| \leq \delta(\varepsilon, \omega)$, $|\arg v_\pm(\xi) - \arg(z - \xi)| \leq \omega$, выполняется $|\varphi(z) - \varphi^\pm(\xi)| \leq \varepsilon$, см. определение 2.

Л е м м а 1. Пусть $\varphi(z)$ определена и непрерывна в $D^\pm$ и имеет равномерный предел $\varphi^\pm(\xi)$ из $D^\pm$ на Γ по направлениям, отклоняющимся от нормальных на угол, не больший некоторого ω , $0 \leq \omega < \pi/2$.

Тогда $\varphi(z)$, дополненная на Γ предельными значениями $\varphi^\pm(\xi)$, непрерывна в $D^\pm \cup \Gamma$.

Л е м м а 2. Пусть $\varphi(\xi)$ для некоторой точки $\xi_0 \in \Gamma$ удовлетворяет оценке $|\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| \leq M(|\ln|\xi - \xi_0|| + 1)^{-\lambda} \forall \xi \in \Gamma$ с $\lambda > 1$.

Тогда существует предел интеграла (5) при $z \rightarrow \xi_0$, $z \in D^\pm$ по любому некасательному к Γ направлению и $\forall \omega$, $0 \leq \omega < \pi/2$, $\exists \rho(\omega) > 0$ и $\exists C(\omega, \lambda)$, зависящая только от ω , λ и Γ , что $\forall z \in D^\pm$, удовлетворяющих $|z - \xi_0| \leq \rho(\omega)$, $|\arg v_\pm(\xi_0) - \arg(z - \xi_0)| \leq \omega$, имеет место $|J(z) - J^\pm(\xi_0)| \leq C(\omega, \lambda)M(|\ln|z - \xi_0|| + 1)^{-(\lambda-1)}$. Для $J^\pm(\xi_0)$ справедливы в ξ_0 формулы Сохоцкого — Племели.

Доказательство утверждения Б базируется на следующих двух основных леммах.

Л е м м а 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть $\varphi(\xi) \in L_\infty(\Gamma)$ для некоторой точки $\xi_0 \in \Gamma$ удовлетворяет $\forall \xi \in \Gamma$ оценке $|\varphi(\xi)| \leq M(|\ln|\xi - \xi_0|| + 1)^{-\alpha}$ с некоторым α , $0 \leq \alpha < 1$.

Тогда существует такая постоянная $C(\alpha, \lambda)$, зависящая только от α , λ и Γ , так что $\forall \xi \in \Gamma$

$$|(K\varphi)(\xi) - (K\varphi)(\xi_0)|, \quad |(K'\varphi)(\xi) - (K'\varphi)(\xi_0)| \leq \\ \leq C(\alpha, \lambda)M(|\ln|\xi - \xi_0|| + 1)^{-(\alpha + \lambda - 1)}.$$

Из этой леммы следует ограниченность K и K' как операторов из $L_\infty(\Gamma)$ в $H(\ln^{-(\lambda-1)}; \Gamma)$.

Лемма 4. Пусть $\varphi(\xi) \in H_A(\ln^{-\alpha}; \Gamma)$, причем $0 < \alpha < 1$.

Тогда при выполнении условий теоремы 1 $K\varphi$ и $K'\varphi \in H_A(\ln^{-(\alpha+\lambda-1)}; \Gamma)$.

Отметим, что при доказательстве леммы 4 существенно используется утверждение лемм 2 и 3.

Наметим доказательство утверждения В. Операторы K и K' , определенные (7), действуют не только ограниченно, но и вполне непрерывно в любом пространстве $L_p(\Gamma)$, $1 \leq p \leq \infty$. Обозначим через $\overset{p}{K}$ и $\overset{p}{K}'$ операторы K и K' , рассматриваемые как операторы в $L_p(\Gamma)$, через $\overset{c}{K}$ и $\overset{c}{K}'$ — операторы K и K' , рассматриваемые как операторы в $C(\Gamma)$, и $(\overset{c}{K})^*$, $(\overset{c}{K}')^*$ — сопряженные к $\overset{c}{K}$ и $\overset{c}{K}'$. Легко проверить, что оператор $\overset{q}{K}'$, $1 < q \leq \infty$, является сопряженным к $\overset{p}{K}$, $1 \leq p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Из хорошо известных теорем (см. (7)) следует, что операторы $I - \overset{p}{K}$ и $I - \overset{p}{K}'$, $1 \leq p \leq \infty$, являются фредгольмовыми. В частности, размерности пространств решений однородных уравнений $(I - \overset{p}{K})\varphi = 0$ и $(I - \overset{p}{K}')\psi = 0$ в $L_p(\Gamma)$, обозначаемые $\dim N(I - \overset{p}{K})$ и $\dim N(I - \overset{p}{K}')$, конечны и $\dim N(I - \overset{p}{K}) = \dim N(I - \overset{q}{K}')$ $\forall 1 \leq p, q \leq \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. При $p < p_1$ $L_p(\Gamma) \supset L_{p_1}(\Gamma)$ и $\dim N(I - \overset{p}{K}) \geq \dim N(I - \overset{p_1}{K})$. Поэтому $\dim N(I - \overset{p}{K}) \geq \dim N(I - \overset{p}{K}) = \dim N(I - \overset{p}{K}') \geq \dim N(I - \overset{q}{K}') = \dim N(I - \overset{q}{K})$, откуда $\dim N(I - \overset{p}{K}) = \dim N(I - \overset{q}{K}')$ для любых $p, 1 \leq p \leq \infty$. Из леммы 3 имеем $\dim N(I - \overset{c}{K}) = \dim N(I - \overset{c}{K}')$. Отсюда следует $\dim N(I - (\overset{c}{K})^*) = \dim N(I - \overset{c}{K}) = \dim N(I - \overset{c}{K}) = \dim N(I - \overset{c}{K}') = \dim N(I - \overset{c}{K}')$. Поскольку $N(I - \overset{c}{K}') \subseteq N(I - (\overset{c}{K})^*)$ ($N(A)$ — ядро оператора A) и их размерности совпадают, имеем $N(I - \overset{c}{K}') = N(I - (\overset{c}{K})^*)$, откуда и вытекает утверждение В.

Из только что проведенных рассуждений, в частности, вытекает

Лемма 5. Всякое решение $\varphi(\xi)$, принадлежащее $L_1(\Gamma)$, любого из уравнений (6) с $f(\xi) \in C(\Gamma)$ принадлежит $C(\Gamma)$.

Справедливость утверждения Г проверяется с помощью лемм 3 и 5: если $\varphi(\xi)$ решение первого уравнения (6) с $f \in H(\ln^{-\lambda}; \Gamma)$ и $\varphi(\xi_0) = 0$, то, применяя последовательно достаточное число раз лемму 3, найдем, что $|\varphi(\xi)| \leq C(|\ln|\xi - \xi_0|| + 1)^{-(\lambda+\varepsilon)}$, где $\varepsilon > 0$ произвольно малое. Таким образом, $\varphi(\xi)(\xi - \xi_0)^{-1} \in L_1(\Gamma)$, а далее применима лемма 5.

Замечание 1. Нетрудно привести примеры, показывающие, что при $\lambda \leq 1$ теорема неверна.

Замечание 2. Интересно выяснить, при каких менее сильных ограничениях относительно непрерывности $G(\xi)$ остается справедливым первое из утверждений теоремы 1. Справедливо ли оно, например, в случае, когда $G(\xi)$ удовлетворяет на Γ лишь равномерно условию Дини.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
22 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. И. Мухелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968.
² Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, «Наука», 1968. ³ Ф. Д. Гахов, УМН, т. 7, № 4 (1952). ⁴ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, УМН, т. 13, № 2 (1958). ⁵ М. С. Будяну, И. П. Гохберг, Матем. исслед., т. 3, в. 2-3, Кишинев, 1968. ⁶ В. В. Пальцев, ДАН, т. 218, № 1 (1974). ⁷ С. Г. Крейн, Линейные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», 1971.