

Л. А. ИВАНОВ

О ТЕОРЕМЕ КОШИ — КОВАЛЕВСКОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 30 IX 1975)

1. Доказательство существования и единственности решения задачи Коши методом последовательных приближений, данное Розенблумом ⁽¹⁾ и Хёрмандером ⁽²⁾, основано на использовании следующих вспомогательных результатов. Во-первых, доказывается разрешимость в единичном полицилиндре некоторой относительно простой задачи Коши. Затем при помощи оценок типа «дифференциальных неравенств» получаются соответствующие оценки на последовательные приближения.

В настоящей работе описывается класс операторов, для которых справедливы указанные оценки. Это дает возможность решать задачу Коши для операторов с особенностями.

2. Докажем один общий результат, из которого будет следовать теорема Коши — Ковалевской. Через $\bar{g}(z)$ будем обозначать набор функций $\{g_{i,k}(z_k), i=1, \dots, m_k, k=1, \dots, n\}$, $z=(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Каждая из функций $g_{i,k}(z_k)$ предполагается аналитической при $|z_k| < 1$ и удовлетворяет условию

$$|g_{i,k}(z_k')| \leq |g_{i,k}(z_k'')| \quad \text{при} \quad |z_k'| \leq |z_k''|, |z_k''| < 1. \quad (1)$$

Каждой такой функции ставится в соответствие дифференциальный оператор (вообще говоря с особенностью)

$$T_{g_{i,k}} = g_{i,k}^{-1}(z_k) \frac{\partial}{\partial z_k} g_{i,k}(z_k) = \frac{\partial}{\partial z_k} + \frac{g'_{i,k}(z_k)}{g_{i,k}(z_k)}. \quad (2)$$

Из таких одномерных операторов конструируется оператор $T_{\bar{g}}^m$ по формуле

$$T_{\bar{g}}^m = \prod_{k=1}^n \prod_{i=1}^{m_k} T_{g_{i,k}} = \prod_{k=1}^n T_{g_{m_k,k}} T_{g_{m_k-1,k}} \dots T_{g_{1,k}}. \quad (3)$$

В мультииндексе $m=(m_1, \dots, m_n)$ некоторые из m_k могут обращаться в нуль. В таком случае мы будем считать, что по z_k никакого оператора не применяется. Ясно, что порядком оператора (3) является число $|m| = m_1 + \dots + m_n$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$T_{\bar{g}}^m u = \sum_{|i| \leq m} a^i D^i u + f, \quad i=(i_1, \dots, i_n), \quad (4)$$

где коэффициенты a^i — аналитические функции от $z=(z_1, \dots, z_n)$ в окрестности нуля в $\mathbb{C}^n$, а $D=(\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_n)$. Зададим начальные условия

$$\partial^p u / \partial z_k^p = 0 \quad \text{при} \quad z_k=0, 0 \leq p < m_k, k=1, \dots, n. \quad (5)$$

Теорема 1. Если $\sum_{|i|=|m|} |a^i(0)|$ меньше некоторого числа, зависящего от $|m|$, тогда для любой функции f , аналитической в окрестности нуля,

краевая задача (4), (5) имеет единственное аналитическое в окрестности нуля решение.

Доказательство теоремы основано на следующих вспомогательных результатах.

Лемма 1. Какова бы ни была функция f , аналитическая в полицилиндре $\Omega = \{z; |z_k| < 1, k=1, \dots, n\}$, существует единственное аналитическое в Ω решение уравнения

$$T_{\bar{g}}^m u = f,$$

удовлетворяющее начальным условиям (5).

Отметим, что в лемме 1 условия (1) на $g_{i,k}$ можно значительно ослабить.

Лемма 2. Если функция $v(\xi)$, $\xi \in \mathbb{C}$, аналитична в круге $|\xi| < 1$ и

$$|v(\xi)| \leq C(1-|\xi|)^{-a}, \quad |\xi| < 1,$$

где $a > 0$, то

$$|v'(\xi)| \leq Ce(1+a)(1-|\xi|)^{-a-1}, \quad |\xi| < 1.$$

Доказательство дано, например, в (2).

Лемма 3. Если $v(\xi)$, $\xi \in \mathbb{C}$, аналитична в круге $|\xi| < 1$, $v(0) = 0$ и

$$|T_{g_{i,k}} v(\xi)| \leq C(1-|\xi|)^{-a-1}, \quad |\xi| < 1,$$

где $g_{i,k} = g_{j,k}(\xi)$, то

$$|v(\xi)| \leq Ca^{-1}(1-|\xi|)^{-a}, \quad |\xi| < 1.$$

Доказательство существенно использует условие (1) для $g_{i,k}$; оператор $T_{g_{i,k}}$ определен в (2).

Доказательство теоремы. Запишем рекуррентную формулу для метода последовательных приближений

$$T_{\bar{g}}^m u_{p+1} = \sum_{|i| \leq |m|} a^i D^i u_p + f, \quad p=0, 1, \dots, \quad (6)$$

в которой каждая функция удовлетворяет условиям (5).

Для разности $v_p = u_{p+1} - u_p$ мы получим, что

$$T_{\bar{g}}^m v_{p+1} = \sum_{|i| \leq m} a^i D^i v_p.$$

Предположим сначала, что a^i и f аналитичны в некоторой окрестности замыкания полидиска $\Omega = \{z, |z_k| < 1, k=1, \dots, n\}$. Пусть $\sum_{|i| \leq |m|} \leq A$, $|v_0| < M$ в Ω . Тогда найдется такая константа C , что

$$|v_p(z)| \leq C^p M \prod_{k=1}^n (1-|z_k|)^{-|m|p}, \quad z \in \Omega, \quad p=0, 1, \dots \quad (7)$$

Доказательство оценки (7) проводится по индукции с использованием оценок лемм 2 и 3, при этом константу можно выбрать в виде $C = A(2e)^{|m|}$. Если $C < 1$ и $C < \gamma < 1$, то оценка (7) показывает, что ряд $\sum |v_p(z)|$ равномерно сходится в окрестности нуля.

$$\Omega' = \left\{ z; z \in \Omega, \prod_{k=1}^n (1-|z_k|)^{|m|} > \gamma \right\}.$$

Следовательно, предел $u = \lim_{p \rightarrow \infty} u_p$ существует и представляет собой аналитическую функцию в Ω' . Поскольку сходимости имеет место со всеми производными, то, переходя к пределу в (6), получаем, что u — решение уравнения (4) в Ω' . Аналогично проверяется выполнение начальных условий.

Отметим теперь константа в лемме 3 не зависит от $g_{j,k}(\xi)$. Поэтому заменой $U(z)=u(rz)$, $F(z)=r^m f(rz)$, при малых r , задачу (4) можно свести к рассмотренной. При этом предположения будут выполняться, если

$$\sum_{|i|=|m|} |a^i(0)| < 2e^{-|m|}.$$

Теорема доказана.

3. Рассмотрим некоторые частные случаи выбора $\bar{g}(z)$.

Пусть прежде всего $g_{i,k}(0) \neq 0$ при всех i и k . Тогда, как показывает запись (2), операторы $T_{g_{i,k}}$ не имеют вырождения и теорема сводится к классической. Отметим, что классический случай получается из теоремы 1 при

$$g_{i,k}(z_k) \equiv 1, \quad T_g = \partial/\partial z_k, \quad i=1, \dots, m_k, \quad k=1, \dots, n.$$

Теперь рассмотрим случай, когда только некоторые из $g_{i,k}$ тождественно равны единице, а именно с номерами i_s , $1 \leq i_s \leq \dots \leq i_{s_k} \leq m_k$. В этом случае теорема 1 допускает следующее распространение на неоднородный случай.

Теорема 2. В наших предположениях имеет место утверждение теоремы 1 и в том случае, когда начальные условия (5) заменяются на условия

$$\frac{\partial^p}{\partial z_k^p} (u - \varphi) = 0 \quad (8)$$

при $z_k=0$, если $0 \leq p < m_k$, $k=1, \dots, n$, а $\varphi(z)$ аналитична в окрестности нуля в $\mathbb{C}^n$, причем

$$\frac{\partial^{p+1}}{\partial z_k^{p+1}} \varphi = 0$$

при $z_k=0$, $0 \leq p < m_k$, $p \neq i_s$, $s=1, \dots, s_k$, $k=1, \dots, n$.

Рассмотрим случай, когда $g_{i,k}$ — степенные функции; $g_{i,k}(z_k) = z_k^{p_i}$, p_i — вещественные. В этом случае

$$T_{g_{i,k}} = \partial/\partial z_k + p_i/z_k, \quad i=1, \dots, m_k, \quad k=1, \dots, n.$$

Ограничение (1) на $g_{i,k}$ означает, что $p_i > 0$ для всех i . Суперпозиция операторов такого вида позволяет рассматривать степени некоторых классов вырожденных операторов с постоянными коэффициентами более высоких порядков. Например, можно брать по различным переменным различные степени оператора второго порядка вида

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k^2} + \frac{r_k}{z_k} \frac{\partial}{\partial z_k} + \frac{q_k}{z_k^2}, \quad k=1, \dots, n,$$

где $r_k \geq 1$, $-r_k \leq q_k \leq ((r_k-1)/2)^2$.

Наконец, если $m_k = 2l_k$ чётно, $k=1, \dots, n$, и в произведении $T_{g_{m_k,k}} T_{g_{m_k-1,k}} \dots T_{g_{1,k}}$ на нечетных местах (номер $i=2j-1$) взять функции $g_{2j-1,k}(z) \equiv 1$, $j=1, \dots, l_k$, а на четных местах (номер $i=2j$) функции $g_{2j,k} = z^{p_{j,k}}$, то это произведение будет равно

$$\prod_{j=1}^{l_k} B_{p_{j,k}} = B_{p_{l_k,k}} B_{p_{l_k-1,k}} \dots B_{p_{1,k}},$$

где $B_{p_{j,k}} = \frac{\partial^2}{\partial z_k^2} + \frac{p_{j,k}}{z_k} \frac{\partial}{\partial z_k}$ — оператор Бесселя. Обозначим теперь через $\bar{p}$ набор $\bar{p} = \{p_{j,k}, j=1, \dots, l_k, k=1, \dots, n, p_{j,k} > 0\}$, а через $B_{\bar{p}}^i$ оператор $B_{\bar{p}}^i =$

$= \prod B_{p_j, k}, l=l_1, \dots, l_n$. Рассмотрим уравнение

$$B_{\bar{p}}^l u = \sum_{|i| \leq 2|l|} a^i D^i u + f, \quad (9)$$

где a^i и j такие же, как и в теореме 1, с начальными условиями

$$\frac{\partial^p}{\partial z_k^p} (u - \varphi) = 0 \quad \text{при} \quad z_k = 0, \quad (10)$$

если $0 \leq p \leq 2l_k, k=1, \dots, n$, а $\varphi(z)$ — аналитическая в окрестности нуля в $\mathbb{C}^n$ функция такая, что

$$\partial^{2p+1} \varphi / \partial z_k^{2p+1} = 0 \quad \text{при} \quad z_k = 0, 0 \leq p < l_k. \quad (11)$$

Из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие. В наших предположениях задача (9)–(11) однозначно локально разрешима в классе аналитических функций.

В заключение отметим, что мы упомянули только небольшую часть возможных приложений полученной теоремы. С другой стороны несомненный интерес представляет уменьшение требований на функции $g_{i, k}$. Отметим, что в некоторых частных случаях (неитерированный оператор Бесселя) это удается сделать методом мажорант ⁽³⁾.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
30 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ P. C. Rosenblum, Proc. of the Intern. Congress of Mathem. (Cambridge, 1950), v. 1, Providence, Am. Math. Soc., 1952, p. 442. ² Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965. ³ B. A. Fusaro, The Cauchy — Kowalewski Theorem and a Singular Initial Value Problem, SIAM Rev., v. 10, № 4, October, 1963.