

В. Ф. БАКЛАНОВСКАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА СЕТОК ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 2 XII 1975)

Статья посвящена исследованию метода сеток для уравнения

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \left(\frac{\partial \sigma(y)}{\partial x} \right) \right) \quad (0,1)$$

в области $\mathcal{D} = \{a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}$, где функции $\sigma(y)$, $K(s)$ ограничены при ограничениях y, s ; $y(x, t)$ непрерывно дифференцируема по t ; $\sigma(y)$, $K(s)$ непрерывно дифференцируемы по x ; функции $\sigma(y)$, $K(s)$ монотонно возрастают; $K(s) = K_1(s) + K_2(s)$, $K_1'(s)$ монотонно убывает, $K_2'(s)$ монотонно возрастает, $\{K_1'(0)\}^{-1} \geq 0$, $K_2'(0) \geq 0$. В качестве $K(s)$ может быть, например, функция $K(s) = |s|^\alpha \operatorname{sign} s$, $\alpha \geq 0$. При $\alpha = 1/2$ уравнение (0,1) в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \operatorname{sign} \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \left[\sigma'(y) \cdot \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \right]^{1/2} \right\}. \quad (0,2)$$

Уравнение (0,2) встречается, в частности, при исследовании неустановившегося течения воды в реках (см. (1)).

Уравнение (0,1) в точках, где либо $y=0$, либо $\partial y/\partial x=0$, имеет особенности, связанные с вырождением. Наличие точек вырождения обуславливает трудности применения тех или иных численных методов решения, поскольку погрешность аппроксимации производных разностями в этих точках может не стремиться к нулю при неограниченном измельчении сетки.

Уравнения вида (0,1) при $K(s) \equiv s$ хорошо изучены. При $K(s) = |s|^{\alpha-2}s$ доказано существование и единственность решения при $1 < \alpha < \infty$ первой краевой задачи; при $K(s) = |s|^{\alpha-2}s$, $\sigma'(y) = |y|^{\beta-2}$, $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 2$, доказано существование решения уравнения (0,1) при $y|_{x=a} = y|_{x=b} = 0$ методом конечных разностей. Эти результаты приведены в (2, 3).

В настоящей работе рассмотрен метод сеток для уравнения (0,1), доказана сходимость метода. Сначала (п. 1) изучаются свойства разностного решения $Y_{i,h}$. Для доказательства сходимости метода (п. 2) вводится вспомогательная функция $v(x, t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = K \left(\frac{\partial \sigma(\partial v/\partial x)}{\partial x} \right) \quad (0,3)$$

и такая, что $y(x, t) = \partial v/\partial x$. Доказана равномерная сходимость функции $V_{i,h}$ — разностного решения уравнения (0,3) — к функции $v(x, t)$ при $\tau, h \rightarrow 0$, где τ, h — соответственно шаги по t и по x (доказательство сходимости метода сеток для уравнения (0,3) представляет и самостоятельный интерес). После этого делается обратный переход от $v(x, t)$ к $y(x, t)$ и доказывается, что

$$\tau h \sum_{\mathcal{D}^*} (y_{i,h} - Y_{i,h})^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau, h \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{D}^*$ лежит строго внутри $\mathcal{D}$. При этом используются свойства разностного решения, доказанные в п. 1. При $\sigma(y) \equiv y$ (п. 3) доказана

равномерная сходимость метода сеток для уравнения (0,1), дана оценка погрешности метода.

Теоремы 1–6 справедливы также для уравнения (0,1) в многомерной области.

1. Рассматривается уравнение (0,1) с условиями

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad y(a, t) = y_1(t), \quad y(b, t) = y_2(t), \quad (1,1)$$

причем

$$M = \max \{ |y_0|, |y_1|, |y_2| \}.$$

Будем предполагать, что существует единственная функция $y(x, t)$ — решение поставленной задачи, при этом

$$|y(x, t)| \leq M; \quad (1,2)$$

для любой области $\mathcal{D}^*$, лежащей строго внутри $\mathcal{D}$, имеет место соотношение

$$\iint_{\mathcal{D}^*} \frac{\partial y}{\partial x} K \left(\frac{\partial \sigma(y)}{\partial x} \right) dx dt \leq M_1, \quad (1,3)$$

где M_1 — зависящая от $\mathcal{D}^*$ константа.

Составим следующую разностную аппроксимацию задачи (0,1), (1,1):

$$Y_{i, k+1} - Y_{i, k} = \tau h (\Phi_{i+1/2, k+1} - \Phi_{i-1/2, k+1}); \quad (1,4)$$

$$Y_{i, 0} = y_0(x_i), \quad Y_{0, k} = y_1(t_k), \quad Y_{N, k} = y_2(t_k); \quad (1,5)$$

здесь

$$\Phi_{i+l, k+1} = K[(\sigma_{i+l+1/2, k+1} - \sigma_{i+l-1/2, k+1})h^{-1}], \quad l = 1/2, -1/2.$$

Для решения задачи (1,4), (1,5) справедливо

С в о й с т в о 1. $|Y_{i, k}| \leq M$.

Имеет место

Т е о р е м а 1. Пусть $\mathcal{D}^* = \{a < a^* \leq x \leq b^* < b, 0 \leq t \leq T\}$. Справедливо неравенство

$$\tau h \sum_{\mathcal{D}^*} \frac{Y_{i+1, k+1} - Y_{i, k+1}}{h} K \left(\frac{\sigma_{i+1, k+1} - \sigma_{i, k+1}}{h} \right) \leq M_2, \quad (1,6)$$

где $M_2 = \text{const}$.

2. Определим функцию $v(x, t)$ как решение уравнения (0,3) в области $\mathcal{D}$ с условиями

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad \partial v / \partial x|_{x=a} = y_1(t), \quad \partial v / \partial x|_{x=b} = y_2(t), \quad (2,1)$$

где v_0 — какая-либо функция, удовлетворяющая уравнению

$$\partial v_0 / \partial x = y_0(x); \quad (2,2)$$

здесь $y_0(x)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ — функции, определенные формулами (1,1). Легко видеть, что $y(x, t) = \partial v / \partial x$ внутри $\mathcal{D}$.

Какое именно из решений уравнения (2,2) взять в качестве начальной функции $v_0(x)$, для дальнейшего совершенно несущественно. Разностные схемы, выписываемые ниже для получения $V_{i, k}$ (приближенного решения задачи (0,3), (2,1)), в решении исходной задачи не участвуют. Эти функции $v(x, t)$ и $V_{i, k}$ введены только для исследования свойств разностного решения исходной задачи. Функция $v(x, t)$ является более гладкой, чем $y(x, t)$. Поэтому доказательство сходимости разностного метода получается для $v(x, t)$ элементарно.

Будем аппроксимировать задачу (0,3), (2,1) следующей разностной схемой:

$$(V_{i,k+1} - V_{i,k})\tau^{-1} = K\{(\sigma[(V_{i+1,k+1} - V_{i,k+1})h^{-1}] - [\sigma(V_{i,k+1} - V_{i-1,k+1})h^{-1}])h^{-1}\}; \quad (2,3)$$

$$V_{i,0} = V_0, \quad (V_{1,k+1} - V_{0,k+1})h^{-1} = y_1(t_{k+1}), \quad (V_{N+1,k+1} - V_{N,k+1})h^{-1} = y_2(t_{k+1}); \quad (2,4)$$

здесь функция V_0 определена в $\mathcal{D}$ разностным отношением $[(V_0)_{i+1} - (V_0)_i]h^{-1} = y_0$ с условием $V_0|_{i=i_0} = v_0(x_{i_0})$.

Легко видеть, что $(V_{i+1,k} - V_{i,k})h^{-1} = Y_{i,k}$ внутри $\mathcal{D}$.

Справедлива

Теорема 2. *Решение задачи (2,3), (2,4) равномерно по x, t сходится к точному решению задачи (0,3), (2,1) при $\tau, h \rightarrow 0$, причем*

$$v_{i,k} - V_{i,k} = O(\chi_{i,k}) \rightarrow 0,$$

$$\chi_{i,k} = \frac{K(s_{i,k} + \omega_{i,k}) - K(s_{i,k})}{\omega_{i,k}} \left[\omega_{i,k} + \frac{\partial \sigma(y_{i,k}^*)}{\partial x} - \frac{\partial \sigma(y_{i-1,k}^*)}{\partial x} \right] + \delta_{i,k},$$

$$|y_{j,k}^*| \leq |y_{i+1,k} - y_{j,k}|, \quad j = i, i-1,$$

$\omega_{i,k}, \delta_{i,k}$ — погрешности от замены соответственно $\partial \sigma(y)/\partial x$ и $\partial v/\partial t$ разностями.

Имеет место также

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{D}^*$ — область, определенная в условиях теоремы 1; имеет место соотношение*

$$\left\{ \tau h \sum_{\mathcal{D}^*} (y_{i,k} - Y_{i,k})^2 \right\}^{1/2} = O(\chi^{1/2}) \rightarrow 0 \quad (2,5)$$

при $\tau, h \rightarrow 0$, где $\chi = \max_{i,k} \chi_{i,k}$.

3. Пусть $\sigma(y) = y$, $K(s) = K_1 + K_2$, где K_1 и K_2 удовлетворяют условиям, указанным во введении. Имеют место соотношения

$$|\partial y / \partial x| \leq M_3, \quad |\partial K(s) / \partial x| \leq M_4,$$

где $M_3 = \text{const}$, $M_4 = \text{const}$. Эти соотношения легко доказать, если перейти от задачи (0,1), (1,1) к эквивалентной задаче

$$\begin{aligned} \partial w / \partial t &= \partial^2 K(w) / \partial x^2, \\ w(x, 0) &= \partial y_0(x) / \partial x, \\ \partial K(w) / \partial x|_{x=a} &= dy_1(t) / dt, \quad \partial K(w) / \partial x|_{x=b} = dy_2(t) / dt. \end{aligned}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4. *При любых τ, h , $\sigma(y) = y$ решение задачи (0,1), (1,1) удовлетворяет соотношениям*

$$\begin{aligned} |Y_{i+1,k} - Y_{i,k}| h^{-1} &\leq M_3, \\ |K[(Y_{i+1,k} - Y_{i,k})h^{-1}] - K[(Y_{i,k} - Y_{i-1,k})h^{-1}]| h^{-1} &\leq M_4. \end{aligned}$$

Теорема 5. *При любых τ, h , $\sigma(y) = y$ имеет место соотношение*

$$\max_{i,k} |y_{i,k} - Y_{i,k}| = O(\chi^{1/2}),$$

где $\chi = \max_{i,k} \chi_{i,k}$, $\chi_{i,k}$ определена в условиях теоремы 2.

Теорема 6. Пусть $\sigma(y) \equiv y$, функции $\omega_{i,k}$, $\varepsilon_{i,k}$ — соответственно погрешности от замены производных $\partial\sigma(y)/\partial x$, $\partial y/\partial t - \partial K(\partial\sigma(y)/\partial x)/\partial t$ разностями. При любых τ, h имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \max \left\{ h \sum_i (y_{i,k} - Y_{i,k})^2 \right\}^{1/2} + \\ & + \left\{ \tau h \sum_{i,k} \left[\frac{(y_{i+1,k} - Y_{i+1,k}) - (y_{i,k} - Y_{i,k})}{h} \right]^2 \cdot K'(s_{i,k}^*) \right\}^{1/2} \leq \\ & \leq (1 + \sqrt{2}) \left[\left(\tau \sum_k h \sum_i \delta_{i,k}^2 \right)^{1/2} + \left(\tau h \sum_{i,k} K'(s_{i,k}^*) \cdot \omega_{i,k}^2 \right)^{1/2} \right], \quad (i, k) \in \mathcal{D}, \\ & \text{где} \end{aligned}$$

$$K'(s^*) = \frac{K(s_1) - K(s_2)}{s_1 - s_2}, \quad s_1 = \frac{\partial y_{i,k}}{\partial x}, \quad s_2 = (Y_{i+1,k} - Y_{i,k}) h^{-1},$$

$$K_1'(s) \leq \max_{M_3 \gg |s| > m} K_1'(s), \quad K_2'(s) \leq \max_{|s| \leq M_3} K_2'(s), \quad \lim_{s \rightarrow 0} K'(s) \omega_{i,k} = 0.$$

Замечание 1. Пусть

$$\|\varphi\| = \left(\tau h \sum_{i,k} \varphi_{i,k}^2 \right)^{1/2}.$$

В правую часть (2,5) входит константа M_6 , которая мажорирует величину $O(\|\varphi\|)$, где $\varphi_{i,k}$ есть разделенная первая разность от функции $y_{i,k} - Y_{i,k}$. Подставляя в левую часть (2,5) функцию $\varphi_{i,k}$, получим

$$\|\varphi\| = O(M_7 \chi^{1/2}),$$

где константа M_7 мажорирует величину $O(\|\Delta\varphi_{i,k} h^{-1}\|)$. В этом случае

$$\|y - Y\| = O(\chi^{3/4}).$$

Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока разность $\partial^\alpha y / \partial x^\alpha - \Delta^\alpha Y h^{-\alpha}$ суммируема с квадратом.

Замечание 2. Можно доказать, что соотношения (1,3), (1,6), (2,5) справедливы во всей области $\mathcal{D}$.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
26 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Методы системного анализа в проблемах рационального использования водных ресурсов. Труды Межд. Ин-та прикладного системного анализа, т. 1, 1974. ² Ж.-Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., «Мир», 1972. ³ Н. М. Колодий, Вестн. МГУ, № 5, 25 (1971).