

УДК 517.944

МАТЕМАТИКА

В. Я. ИВРИЙ

ВОЛНОВЫЕ ФРОНТЫ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ МИКРОЛОКАЛЬНО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 30 IX 1975)

1. Вопрос о WF (волновых фронтах) решений дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений активно изучался в последнее время. Для эллиптических ⁽¹⁾, субэллиптических ⁽³⁾, некоторых сходных с ними операторов ^(4, 6, 7), а также для многих гипоеллиптических операторов доказана их микролокальная гипоеллиптичность, т. е. показано, что WF решения совпадает с WF правой части. Для строго гиперболических операторов, или более общо, для операторов главного типа с вещественным главным символом ^(2, 3), а также для многих операторов главного типа с комплексным главным символом ⁽⁵⁾ ответ не столь тривиален: WF решения, вообще говоря, шире WF правой части; разница лежит в множестве нулей главного символа и инвариантна относительно переноса вдоль не пересекающихся с WF правой частью участков бихарактеристик P . Аналогичные результаты получены для гиперболических операторов с характеристиками постоянной кратности, удовлетворяющих условию Е. Е. Леви, а также для некоторых более общих операторов ⁽⁸⁾.

Мы будем изучать некоторые операторы с характеристиками переменной кратности; при этом все бихарактеристики будут простыми всюду, исключая, быть может, одну точку. То, что в этом случае появляются новые эффекты, связанные с раздвоением бихарактеристик, видно уже на примере оператора с главной частью $x_0 D_0$.

2. Обозначения: $x = (x_0, x') = (x_0, \dots, x_l) \in X = R^{l+1}$, $X' = \{x \in X, x_0 = 0\}$, $\xi = (\xi_0, \xi') = (\xi_0, \dots, \xi_l)$ — двойственные переменные, T^*X , T^*X' — кокасательные расслоения, $T^*X \setminus 0 = \{(x, \xi) \in T^*X, \xi \neq 0\}$, $T^*X' = \{(x', \xi') \in T^*X', \xi' \neq 0\}$; $D = (D_0, D') = (D_0, \dots, D_l)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$.

Через $L^m(X)$, $L^m(X')$ обозначим пространства классических псевдодифференциальных операторов порядка m на X , X' , имеющих компактные носители.

Напомним одно из эквивалентных определений WF: если $u \in \mathcal{D}'(X)$, $z \in T^*X \setminus 0$, то $z \in \text{WF}(u)$, если из $a \in L^0(X)$, $au \in C^\infty(X)$ вытекает, что $a_0(z) = 0$. Аналогично вводятся волновые фронты для функций из $\mathcal{D}'(X')$. Если T — оператор с ядром $K(x, y) \in \mathcal{D}'(X \times X)$, то $\text{WF}(T) = \{(x, \xi, y, \eta) \in T^*(X \times X), (x, \xi, y, -\eta) \in \text{WF}(K)\}$. Свойства WF подробно изучены в ⁽¹⁻³⁾.

3. Рассмотрим оператор

$$P = x_0 D_0 - i/2 + B,$$

где $B = B(x', D') \in L^1(X')$, причем $B_1(z) \geq 0$.

Пусть $\hat{z} \in T^*X' \setminus 0$, $B_1(\hat{z}) = 0$, V' — достаточно малая коническая по ξ окрестность $\hat{z}$ в $T^*X' \setminus 0$, $0 < \alpha$ — достаточно мало, $V = \{(x, \xi), (x', \xi') \in V', |x_0| < \alpha, |\xi_0| < \alpha|\xi'|\}$. Все дальнейшие рассуждения будем проводить в V .

Введем множества:

$$\begin{aligned}\text{Char } P &= \{z \in V, P_1(z) = 0\}, \quad \Sigma_0 = \{z \in V', B_1(z) = 0\}, \\ \Sigma_1 &= \{z = (x, \xi) \in V, (x', \xi') \in \Sigma_0, \xi_0 = 0\}, \\ \Sigma_2 &= \{z = (z, \xi) \in V, (x', \xi') \in \Sigma_0, x_0 = 0\}, \\ \Sigma &= \{z \in \text{Char } P, B_1(z) = 0\}.\end{aligned}$$

Очевидно $\Sigma_0 = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Также очевидно, что P — оператор главного типа на $V \setminus \Sigma_0$, т. е. если $P_1(x, \xi) = 0$, $(\text{grad}_{\xi}, -x P_1)(x, \xi)$ не пропорционален $(0, \xi)$; напротив, на Σ_0 $P_1(x, \xi) = (\text{grad}_{\xi}, -x P_1)(x, \xi) = 0$.

Проведем через каждую точку $\text{Char } P \setminus \Sigma_0$ бихарактеристику P_1 :

$$dx/ds = \text{grad}_{\xi} P_1(x, \xi), \quad d\xi/ds = -\text{grad}_x P_1(x, \xi).$$

Тогда

I. Вдоль бихарактеристик сохраняется B_1 ; поэтому бихарактеристика либо не пересекает Σ , либо содержится в Σ .

II. Бихарактеристики, содержащиеся в Σ_1 , Σ_2 , суть лучи $\{(\text{sign } x_0, x', \xi) = \text{const}\}$, $\{(x, \text{sign } \xi_0, \xi') = \text{const}\}$.

III. Пусть $t = x_0 + \xi_0 |\xi|^{-1}$; тогда вдоль бихарактеристик t монотонна и

$$|dx/dt| + |\xi|^{-1} |d\xi/dt| \leq C$$

для всех $(x, \xi) \in \text{Char } P \setminus \Sigma_0$.

Если $z \in \text{Char } P \setminus \Sigma$, то пусть $\gamma(z)$ — бихарактеристика, проходящая через z . Если $z = (x, \xi) \in \Sigma_1$, то пусть $\gamma_1(z) = \{(y, \eta) \in V, (y', \eta) = (x', \xi)\}$, а если $z = (x, \xi) \in \Sigma_2$, то пусть $\gamma_2(z) = \{(y, \eta) \in V, (y, \eta') = (x, \xi')\}$. Для $z \in \text{Char } P \setminus \Sigma$ введем $\gamma^{\pm}(z) = \{z' \in \gamma(z), \pm t(z') \geq \pm t(z)\}$, а для $z \in \Sigma_j$ введем $\gamma_j^{\pm}(z) = \{z' \in \gamma(z), \pm t(z') \geq \pm t(z)\}$. Если $z \in \Sigma_j$, $\pm t(z) > 0$, то введем $\gamma^{\pm}(z) = \gamma_j^{\pm}(z)$; если же $z = (x, \xi) \in \Sigma_j$, $\pm t(z) \leq 0$, то введем $\gamma^{\pm}(z) = \gamma_j^{\pm}(z) \cup \gamma_{3-j}^{\pm}(z^0)$, где $z^0 = (0, x', 0, \xi') = \gamma_j^{\pm}(z) \cap \Sigma_0$.

4. Теорема 1. Пусть W , W_1 — достаточно малые конические по ξ окрестности $\hat{z}$, $\bar{W} \subset W_1$, $\bar{W}$ — замыкание W в $T^*X \setminus 0$. Тогда существуют операторы $E_{\pm}$, действующие из $\mathcal{D}'(X)$ в $\mathcal{E}'(X)$ и из $C^{\infty}(X)$ в $C_0^{\infty}(X)$, такие, что

$$\text{WF}(PE_{\pm} - I) \cap (W \times T^*X) = \emptyset,$$

$$\text{WF}(E_{\pm}) \subset \text{diag } W_1 \times W_1 \cup \{(z, z') \in (\text{Char } P \times \text{Char } P) \cap W_1 \times W_1, z \in \gamma^{\pm}(z')\},$$

где $\text{diag } W_1 \times W_1 = \{(z, z), z \in W_1\}$.

5. Введем линейное множество $\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{D}'(X), \hat{z} \in \text{WF}(Pu)\}$. Для любой $u \in \mathcal{U}$ существует W — достаточно малая коническая по ξ окрестность $\hat{z}$ такая, что $W \cap \text{WF}(Pu) = \emptyset$; тогда $\text{WF}(u) \cap W \subset \text{Char } P$, и в силу того, что вне Σ_0 P — оператор главного типа, для любого $j = 1, 2$ и любого знака $(\pm)$ $(\gamma_j^{\pm}(\hat{z}) \setminus \hat{z}) \cap W$ либо не пересекается с $\text{WF}(u)$, либо содержится в $\text{WF}(u)$ целиком $(^2, ^3)$.

Теорема 2. Пусть $u_{\pm} \in \mathcal{U}$. Тогда, если существует W — окрестность $\hat{z}$ такая, что $\text{WF}(u_{\pm}) \cap (\gamma^{\pm}(\hat{z}) \setminus \hat{z}) \cap W = \emptyset$, то $\hat{z} \in \text{WF}(u_{\pm})$.

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на микролокальной гиперболичности P . Именно: существуют $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — интегральные операторы Фурье порядков 0, 1 такие, что $\mathcal{A}\mathcal{B}$, $\mathcal{B}\mathcal{A} \in L^1(X)$, $(\mathcal{B}\mathcal{A})_1(\hat{z}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})_1(z^*) \neq 0$ (z^* — образ $\hat{z}$ при каноническом отображении, соответствующем $\mathcal{B}$) и с точностью до операторов, символ которых равен 0 в конической по ξ окрестности z^* ,

$$\mathcal{A}P\mathcal{B} \sim -D_1^2 + Q,$$

где $Q = Q(x, D') \in C^{\infty}(R^1, L^2(X'))$, $Q_2(x, \xi') \geq \varepsilon x_0^2 |\xi'|^2$, $\varepsilon > 0$.

З а м е ч а н и е. Если вместо неотрицательности B_1 потребовать его неположительности, то можно сохранить теоремы 1 и 2, заменив в определении $\gamma^\pm$ t на $t' = x_0 - \xi_0 |\xi|^{-1}$. Пусть $B_1 = 0$ в V' ; тогда $\Sigma_0 = V'$, $\text{Char } P = \Sigma$; в определении $\gamma^\pm$ мы можем использовать и t , и t' ; поэтому в этом случае положительные направления вдоль бихарактеристик, лежащих в Σ_1 и в Σ_2 , мы можем выбрать независимо. Обратное:

Теорема 3. *Предположим, что ни в какой окрестности $\hat{z}$ B_1 не обращается тождественно в 0. Тогда существуют $u_\pm \in \mathcal{U}$ такие, что $\text{WF}(u_\pm) = (\gamma_1^\pm(z) \cup \gamma_2^\mp(\hat{z})) \times R^+ \cap \bar{W}$, где $M \times R^+ = \{(x, \lambda \xi), (x, \xi) \in M, \lambda \in R^1, \lambda > 0\}$, W — некоторая коническая по ξ окрестность $\hat{z}$.*

Это связано с тем, что в предположениях теоремы $(\gamma_1^\pm(\hat{z}) \cup \gamma_2^\mp(\hat{z}))$ аппроксимируются бихарактеристиками, лежащими в $\text{Char } P \setminus \Sigma$.

6. **Теорема 4.** *Предположим, что $u_j \in \mathcal{U}$ и существует W — окрестность $\hat{z}$ такая, что $\text{WF}(u_j) \cap (\gamma_j^+(\hat{z}) \cup \gamma_j^-(\hat{z}) \setminus \hat{z}) \cap W = \emptyset$. Тогда существуют целое неотрицательное число n , $w_{jk}(x') \in \mathcal{D}'(X')$, $k = 0, \dots, n$, такие, что $\hat{z} \notin \text{WF}(u_j - v_j)$, где*

$$v_1 = \sum_{k=0}^n w_{1k}(x') \delta^{(k)}(x_0), \quad v_2 = \sum_{k=0}^n w_{2k}(x') x_0^k;$$

при этом $\hat{z} \notin \text{WF}(B_{jk} w_{jk})$, $B_{jk} = i(-1)^{j+1}(k+1/2) + B$.

С л е д с т в и е. *Для того чтобы существовала $u_j \in \mathcal{U}$ такая, что $\text{WF}(u_j) \cap (\gamma_j^+(\hat{z}) \cup \gamma_j^-(\hat{z})) = \hat{z}$, необходимо и достаточно, чтобы существовали целое неотрицательное k и $w_j \in \mathcal{D}'(X')$ такие, что $\hat{z} \in \text{WF}(w_j)$, $\hat{z}^- \notin \text{WF}(B_{jk} w_j)$.*

З а м е ч а н и е. В ряде работ, например в ^(4, 6, 7), содержатся условия, достаточные для микролокальной гипоеллиптичности B_{jk} , т. е. запрещающие существование таких w_j .

Магнитогорский горно-металлургический институт им. Г. И. Носова

Поступило
28 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ L. Hörmander, Acta Math., v. 127, № 1–2, 79 (1971). ² J. J. Duistermaat, L. Hörmander, Acta Math., v. 128, № 3–4, 183 (1972). ³ Л. Хермандер, УМН, т. 28, 6, 106 (1973). ⁴ Ф. Трев, УМН, т. 29, 2, 252 (1974). ⁵ J. J. Duistermaat, J. Sjöstrand, Investiones Math., v. 120, № 3, 209 (1973). ⁶ L. Boutet de Monvel, Comm. Pure Appl. Math., v. 27, 5, 585 (1974). ⁷ A. Grigis, C. R., Ser. A, v. 280, № 16, 1063 (1975). ⁸ J. Chazarain, Anal. Inst. Fourier, v. 24, № 1, 203 (1974).