

В. П. ТАНАНА

ОБ ОДНОМ ОПТИМАЛЬНОМ АЛГОРИТМЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ВОЗМУЩЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 14 XI 1975)

1. В работе ⁽¹⁾ введено понятие оптимального на некотором классе решений $\mathfrak{M}_r$ метода для операторных уравнений первого рода с возмущенным оператором. В этой же работе доказано, что если в качестве исходной информации известны лишь уровни погрешности правой части δ и оператора h , то оптимальным по порядку будет метод регуляризации А. Н. Тихонова ⁽²⁾ с параметром α , удовлетворяющим обобщенному принципу невязки ⁽³⁾.

В настоящей заметке рассмотрена задача приближенного решения линейного операторного уравнения в банаховых пространствах с приближенно заданной правой частью и оператором и известным уровнем гладкости r точного решения x_0 . Доказано, что для этой задачи оптимальным по порядку будет метод квазирешений ⁽⁴⁾; найдены точные по порядку оценки погрешности метода квазирешений на классе $\mathfrak{M}_r$.

Для реализации метода квазирешений предложен итерационный метод, названный плоскостно-градиентным. Этот метод на каждом шаге позволяет свести общую задачу $\inf \{f(x)/g(x) \leq M\}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — выпуклые непрерывно дифференцируемые функции на множестве $T = \{x/g(x) \leq M\} \subset \subset R^n$, к плоской. Плоскостно-градиентный метод идейно близок к методу проекции градиента ⁽⁵⁾, но значительно более простой и удобный по сравнению с ним. Простота предложенного метода достигается за счет того, что в нем не используется операция метрического проектирования на множестве T , которая в общем случае является трудно реализуемой.

2. Постановка задачи и понятие оптимального метода ее решения. Пусть X — банахово пространство, Y — строго выпуклое банахово пространство, A — линейный ограниченный оператор, отображающий X в Y .

Рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Ax=y, \quad x \in X, \quad y \in Y. \quad (1)$$

Предположим, что при $y=y_0$ существует точное решение x_0 уравнения (1) такое, что $x_0 \in \mathfrak{M}_r = BS_r$, где B — линейный вполне непрерывный оператор, отображающий рефлексивное банахово пространство Z в X , а $S_r = \{z \in Z: \|z\| \leq r\}$, но точные значения правой части y_0 и оператора A неизвестны; вместо них даны некоторые приближения $\bar{y}$ и $\bar{A}$, где $\bar{A}$ — линейный взаимно однозначный ограниченный оператор, отображающий X в Y .

Требуется по $\bar{y}$, $\bar{A}$ и r найти приближенное решение $\bar{x}$ уравнения (1) такое, что $\bar{x} \rightarrow x_0$ при $\bar{y} \rightarrow y_0$ и $\bar{A} \rightarrow A$ ($\|\bar{A} - A\| \rightarrow 0$).

Методом решения поставленной задачи будем называть любое отображение P с областью определения $D_P = Y$, которое начальным данным $(\bar{y}, \bar{A})$ ставит в соответствие приближенное решение $\bar{x} = P\bar{y}$ уравнения (1).

При этом можно ввести количественную характеристику точности метода P на классе корректности $\mathfrak{M}_r = BS_r$ при ограничении на уровни погрешности

постей правой части и оператора следующим образом:

$$\Delta(P) = \sup_{\substack{x_0 \in \mathfrak{M}_r \\ \|\bar{y} - \tilde{A}x_0\| \leq \delta \\ \|\bar{A} - \tilde{A}\| \leq h}} \|P\bar{y} - x_0\|, \quad (2)$$

где $\tilde{A}$ — линейный ограниченный оператор, отображающий X в Y .

Метод P_{opt} будем называть оптимальным на классе $\mathfrak{M}_r$, если

$$\Delta(P_{\text{opt}}) = \inf_{P \in P(Y, X)} \Delta(P),$$

где $P(Y, X)$ — множество всех отображений P с областью определения $D_P = Y$ и областью значений $R_P \subset X$.

Метод $\bar{P}$ будем называть оптимальным по порядку на классе $\mathfrak{M}_r$, если $\Delta(\bar{P}) \sim \Delta(P_{\text{opt}})$.

3. Об оптимальности метода квазирешений. Метод квазирешений ⁽⁴⁾ решения задачи, поставленной в п. 2, заключается в нахождении по $\bar{y}$, $\bar{A}$ и r элемента $\hat{x} \in \mathfrak{M}$, такого, что

$$\|\bar{A}\hat{x} - \bar{y}\|^{\gamma} = \inf_{x \in \mathfrak{M}_r} \|\bar{A}x - \bar{y}\|^{\gamma}, \quad \gamma \geq 1.$$

Существование и единственность квазирешения $\hat{x}$ следует из результатов работы ⁽⁶⁾.

Через $\hat{P}$ обозначим отображение, которое начальным данным $\bar{y}$, $\bar{A}$ и r ставит в соответствие квазирешения $\hat{x}$.

Теорема 1. Метод квазирешений оптимален по порядку на классе $\mathfrak{M}_r$.

4. Оценка погрешности метода квазирешений на классе $\mathfrak{M}_r$. Рассмотрим функцию

$$\omega(\tau, r) = \sup_{x \in \mathfrak{M}_r, \|\bar{A}x\| \leq \tau} \|x\|.$$

Тогда для метода квазирешений $\hat{P}$ имеет место следующая оценка погрешности на классе $\mathfrak{M}_r$:

$$\Delta(\hat{P}) = O(\omega(2\delta + 2Lh, r)), \quad L = \sup_{x \in \mathfrak{M}_r} \|x\|.$$

5. Конечномерные аппроксимации квазирешения. Рассмотрим возрастающие цепочки конечномерных подпространств пространства Z и Y

$$\begin{aligned} Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_n \subset \dots \subset Z, \\ Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_m \subset \dots \subset Y \end{aligned}$$

такие, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n = Z, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m = Y,$$

и последовательность линейных ограниченных операторов $\{P_m\}$, отображающих пространство Y на Y_m соответственно и таких, что $P_my \rightarrow y$ при $m \rightarrow \infty$ для любого $y \in Y$.

Метод конечномерных аппроксимаций для нахождения квазирешений $\hat{x}$ заключается в решении экстремальной задачи

$$\inf \|P_m \bar{A}Bz - P_m \bar{y}\|^{\gamma}. \quad (3)$$

$$\|z\| \leq r$$

Задача (3) разрешима при любых m и n (см. ⁽⁶⁾). В дальнейшем множество решений этой задачи обозначим через $\hat{Z}_{nm}$, а множество $\hat{X}_{nm} = B\hat{Z}_{nm}$ будем называть конечномерной аппроксимацией квазирешения $\hat{x}$.

Теорема 2. *Имеет место β -сходимость последовательности конечно-мерных аппроксимаций $\hat{X}_{nm}$ к квазирешению $\hat{x}$ при $n, m \rightarrow \infty$, т. е.*

$$\sup_{x \in \hat{X}_{nm}} \|x - \hat{x}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow \infty.$$

6. Итерационный плоскостно-градиентный метод. Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$\inf \{f(x)/g(x) \leq M\}, \quad (4)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — строго выпуклые непрерывно дифференцируемые функции на множестве $T = \{x/g(x) \leq M\} \subset R^n$. Обозначим через $\hat{x}$ решение задачи (4), единственное ввиду строгой выпуклости функции $f(x)$.

Пусть x_k — k -я итерация, удовлетворяющая условию $x_k \in T$. Тогда $k+1$ итерацию x_{k+1} найдем, решая следующую задачу:

$$\inf \{f(x)/x \in T \cap Q(x_k)\}, \quad (5)$$

где

$$Q(x_k) = \{x: x = x_k + \alpha \nabla f(x_k) + \beta \nabla g(x_k); \alpha, \beta \in R\}.$$

Теорема 3. *Имеет место сходимость последовательных итераций x_k (см. (5)) к $\hat{x}$ при $k \rightarrow \infty$.*

Замечание. Если функция $f(x)$ не является строго выпуклой, то имеет место β -сходимость последовательных итераций к множеству решений задачи (4).

7. Решение задачи наиточнейшего нагрева линейного стержня. Для проверки вычислительной эффективности предложенного алгоритма на его основе решалась задача наиточнейшего нагрева (7), играющая важную роль в металлургии.

Эта задача заключается в нахождении функции $\hat{\varphi}(t)$, удовлетворяющей условиям

$$\hat{\varphi}(0) = 0, \quad \|\hat{\varphi}'(t)\|_{L_2[0, T]} \leq M,$$

где $\hat{\varphi}'(t)$ — обобщенная производная по Соболеву, и такой, что решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \in [0, T], \quad T > 0,$$

$$\hat{u}(x, 0) = 0, \quad \hat{u}(0, t) = \hat{u}(l, t) = \hat{\varphi}(t),$$

удовлетворяет условию

$$\|\hat{u}(x, T) - \chi(x)\|_{L_2[0, T]}^2 = \inf_{\|\varphi'(t)\|_{L_2[0, T]} \leq M, \varphi(0) = 0} \|u(x, T) - \chi(x)\|^2,$$

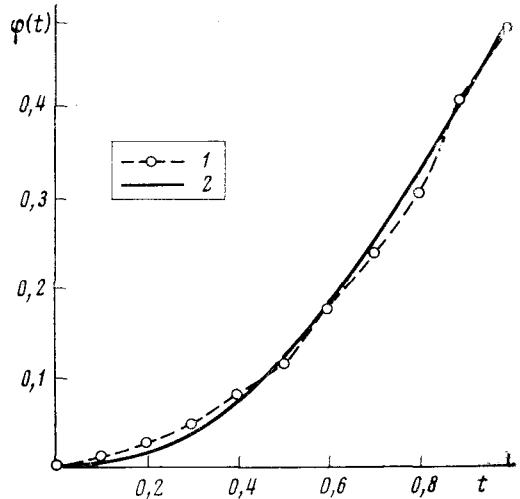


Рис. 1. 1 — 5-я итерация, 2 — график оптимального управления нагревом $\hat{\varphi}(t)$

где $u(x, t)$ — решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности (6) с граничными условиями $\varphi(t)$, а $\chi(x)$ — заданная функция из $L_2[0, l]$. Вычисления проводились на машине М-222, при этом было взято $l=T=1$, $a=1$, $\hat{\varphi}(t)=t^2/2$, $M=6$, а начальное приближение $\varphi_0(t)=\cos \pi t$. Результаты вычислений приведены на рис. 1.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького
Свердловск

Поступило
29 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. И. Танана, Тр. Всесоюз. конф. по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений и их приложениям, Фрунзе, 1975, стр. 43. ² А. Н. Тихонов, ДАН, т. 153, № 1, 49 (1963). ³ А. В. Гончарский, А. С. Леонов, А. Г. Ягола, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 13, № 2, 294 (1973). ⁴ В. К. Иванов, ДАН, т. 145, № 2, 270 (1962). ⁵ Э. Полак, Численные методы оптимизации, М., «Мир», 1974. ⁶ V. I. Klee, Math. Ann., v. 142, № 3, 292 (1961). ⁷ А. Г. Бутковский, С. А. Малый, Ю. И. Андреев, Оптимальное управление нагревом металла, М., «Металлургия», 1972.