Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(74), 2012

УДК 512.542

Знакопеременные группы с наследственно *G*-перестановочной подгруппой

А.Ф. Васильев[1], В.Н. Тютянов[2]

Установлено, что любая конечная простая неабелева знакопеременная группа не имеет собственной наследственно *G*-перестановочной подгруппы.
Ключевые слова: простая неабелева группа, знакопеременная группа, наследственно *G*-перестановочная подгруппа.

It has been established that any finite simple non-Abelian alternating group doesn't have any inherited *G*-permutation subgroup.
Keywords: simple non-Abelian group, alternating group, inherited *G*-permutation subgroup.

Введение и предварительные результаты

В работе [1] А.Н. Скиба ввел понятие *G*-перестановочной и наследственно *G*-перестановочной подгруппы. Пусть *G* – конечная группа и $L \le G$. Подгруппа *L* называется *G*-перестановочной, если для всякой подгруппы $H \le G$ имеется элемент $g \in G$ такой, что $LH^g = H^g L$. Подгруппа *L* называется наследственно *G*-перестановочной, если для всякой подгруппы $T \le G$ такой, что $L \le T$, подгруппа *L* является *T*-перестановочной. Доказан следующий результат.

Теорема. *Знакопеременная группа* $A_n, n \ge 5$ *не обладает нетривиальной наследственно* A_n *-перестановочной подгруппой.*

В Коуровской тетради [2, проблема 17.112] А.Н. Скибой и В.Н. Тютяновым были поставлены два вопроса: какие простые неабелевы группы *G* обладают

а) нетривиальной *G*-перестановочной подгруппой?

б) нетривиальной наследственно *G*-перестановочной подгруппой?

Теорема дает ответ на вопрос б) для знакопеременных групп.

Известны примеры простых неабелевых групп *G* с собственной *G*-перестановочной подгруппой. Простейшим из них является группа $G \cong A_5$, у которой подгруппа порядка 2 является *G*-перестановочной. Авторам не известны простые неабелевы группы *G* с собственной наследственно *G*-перестановочной подгруппой. Из теоремы и работы [3] следует, что для ответа на вопрос б) проблемы 17.112 [2] следует рассмотреть простые неабелевы группы лиевского типа.

Будем использовать обозначения из работ [4], [5].

Приведем следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть* $9 \le n$ *– натуральное число. Тогда существует по меньшей мере три таких простых числа r, что* $n < r < 2n$.

Доказательство. Следует из леммы 1.1 [6].

Лемма 2. *Пусть G – транзитивная группа перестановок степени n, содержащая простой цикл длины p. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) если $p > n/2$, *то G – примитивная группа;*

(2) если G – примитивная группа и $p < n-2$, *то G содержит подгруппу* A_n.

Доказательство. Следует из леммы 1.2 [6].

Лемма 3. *Пусть* $G \in \{A_5, A_6, A_7\}$. *Тогда G не содержит собственной наследственно G-перестановочной подгруппы.*

Доказательство. Обозначим через L собственную наследственно G-перестановочную подгруппу в G. Пусть сначала $G \cong A_5$. Группа G допускает только одну максимальную факторизацию: $G = A_4 D_{10}$ и имеет максимальную подгруппу S_3. Если L^g не содержится в S_3 для всех $g \in G$, то $G = L(S_3)^h$ для некоторого $h \in G$. Поэтому группа G допускает максимальную факторизацию с сомножителем, который изоморфен S_3. Последнее невозможно. Следовательно, можно считать, что $L \leq S_3$. Если $L \cong S_3$, то имеет место факторизация: $G = S_3 A_4$, что невозможно. Если $L \cong Z_3$, тогда в группе G существует подгруппа $Z_3 \times Z_5$. Группа A_5 такой подгруппы не содержит. Таким образом, $L \cong Z_2$. Так как все инволюции в A_5 сопряжены, то можно считать, что $L \leq A_4$. Поскольку L – наследственно G-перестановочная подгруппа, то в группе A_4 существует подгруппа порядка 6, что невозможно.

Пусть $G \cong A_6 \cong PSL_2(9)$. Группа G содержит два класса максимальных подгрупп, изоморфных S_4. Если L^g не содержится в S_4 для всех $g \in G$, то $G = L(S_4)^h$ для некоторого $h \in G$ и $|L|$ делится на 3,5. Поэтому $L \cong A_5$. В этом случае для $R \in Syl_3(G)$ найдется $g \in G$ такой, что $K = LR^g = R^g L$ и $[G:K] = 2$. Последнее невозможно. Значит можно считать, что $L \leq S_4$. Если $L \cong S_4$, то так как в группе G два класса максимальных несопряженных подгрупп, изоморфных S_4, тогда группа G имеет максимальную факторизацию с сомножителями S_4, что невозможно. Пусть $L \cong A_4$. Тогда для $R \in Syl_3(G)$ и некоторого $g \in G$ существует подгруппа $K = LR^g = R^g L$ порядка $2^2.3^2$ с силовской 2-подгруппой $Z_2 \times Z_2$. Из [4] следует, что в A_6 таких подгрупп нет. Если $L \in \{D_8, Z_4, Z_2 \times Z_2, S_3\}$, то для $R \in Syl_5(G)$ существует подгруппа $K = LR^g = R^g L$ для некоторого $g \in G$. Такие подгруппы в A_6 не существуют [4]. Следовательно, $L \cong Z_2$. Так как все инволюции в A_6 сопряжены, то можно считать, что $L \leq A_4$. Значит в A_4 существует подгруппа порядка 6, что невозможно.

Пусть $G \cong A_7$. Если для некоторого $g \in G$ подгруппа $L^g \leq A_6$, то так как A_6 не обладает собственной наследственно A_6-перестановочной подгруппой, можно считать, что $L = A_6$. Группа A_7 обладает максимальной подгруппой S_5, а значит $G = A_6 S_5$, что невозможно. Таким образом, L^g не содержится в A_6 для всех $g \in G$. Поэтому $G = LA_6$ и 7 делит $|L|$. Из [4] следует, что $L \leq PSL_2(7)$. Следовательно, $L \in \{PSL_2(7), Z_7 : Z_3, Z_7\}$. Тогда в группе G существует собственная подгруппа $K = LR^g = R^g L$, где $R \in Syl_5(G)$. Из [4] следует, что в группе G нет собственных подгрупп, порядок которых делится на 35. Последнее противоречие.

Доказательство теоремы

Предположим, что $G \cong A_n$ – минимальный контрпример к теореме и L – собственная наследственно G-перестановочная подгруппа в группе G. Согласно лемме 3, $n \geq 8$. Пусть G действует на множестве $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Обозначим через H стабилизатор точки $1 \in \Omega$. Тогда $H \cong A_{n-1}$ и H – максимальная подгруппа в G.

Если для некоторого $g \in G$ имеет место включение $L^g \leq H \cong A_{n-1}$, то поскольку $G \cong A_n$ – минимальный контрпример к теореме, получаем, что $L = H$. Пусть $[G:H] = n = p^\alpha m$, где $\alpha \geq 1$, $m > 1$ и $(p, m) = 1$. Рассмотрим $P \in Syl_p(G)$. Тогда для некоторого $g \in G$ существует подгруппа $K = LP^g = P^g L$, содержащая L и $[G:K] = m$. Противоречие с тем, что L максимальна в G. Следовательно, $[G:H] = p^\alpha$. Если $\alpha > 1$, то обозначим $P_1 \in Syl_p(L)$. Существует p-подгруппа P_2 в группе G такая, что $P_1 < P_2$ и $[P_2 : P_1] = p$. Тогда для некоторого $g \in G$ существует подгруппа $K = L(P_2)^g = (P_2)^g L$, содержащая L и $[G:K] = p^{\alpha-1}$. Противоречие с тем, что L максимальна в G. Таким образом, $[G:H] = p$. Из [7] следует, что $n = p$. В группе A_p существует максимальная подгруппа, изоморфная S_{p-2}, являющаяся стабилизатором двухэлементного подмножества из Ω, порядок которой взаимно прост с p. Тогда группа G допускает факторизацию $G = A_{p-1}S_{p-2}$, что невозможно.

Поэтому L^g не содержится в H для всех $g \in G$, и можно считать, что $G = LH$. Из того, что для всякого $i \in \Omega$ найдется $g \in G$ такой, что $1g = i$ и представления $g = hl$, где $h \in H$, $l \in L$, получим $i = 1g = 1(hl) = (1h)l = 1l$. Отсюда следует, что L транзитивна на Ω. Пусть сначала $n \le 18$. Для каждого $n \ge 8$ укажем простое число p такое, что $n/2 < p < n-2$. Получим пары $\{n, p\}$: $\{8,5\}$, $\{9,5\}$, $\{10,7\}$, $\{11,7\}$, $\{12,7\}$, $\{13,7\}$, $\{14,11\}$, $\{15,11\}$, $\{16,11\}$, $\{17,11\}$, $\{18,11\}$. Обозначим $P \in Syl_p(G)$. Тогда для некоторого $g \in G$ существует подгруппа LP^g. По лемме 2 $G = LP^g$. Тогда $[G:L] = p^\alpha$ и, в силу [7], $n = p^\alpha$. Так как $n/2 < p$, то $[G:L] = p$ и $L \cong A_{p-1}$. Тогда, как показано выше, $G = A_{p-1}S_{p-2}$, что невозможно.

Следовательно, $n \ge 19$. Если $n = 2k+1 \ge 19$, то $(n-1)/2 \ge 9$. По лемме 1, существуют простые числа r_1, r_2, r_3, для которых $(n-1)/2 < r_1 < r_2 < r_3 < n-1$. Поэтому $(n-1)/2 < r_1 < r_2 < n-2$. Значит, $n/2 < r_2 < n-2$. Если $n = 2k \ge 20$, то существуют простые числа r_1, r_2, r_3, для которых $n/2 < r_1 < r_2 < r_3 < n$. Отсюда следует, что r_1 удовлетворяет условию $n/2 < r_1 < n-2$. Таким образом, при $n \ge 19$ найдется простое число r такое, что $n/2 < r < n-2$. Пусть $R \in Syl_r(G)$, тогда для некоторого $g \in G$ существует подгруппа LR^g и, по лемме 2, $G = LR^g$. Тогда $[G:L] = r^\alpha$ и, согласно [7], $n = r^\alpha$. Поскольку $n/2 < r$, то $[G:L] = r$ и $L \cong A_{r-1}$. Группа $G = A_{r-1}S_{r-2}$, что невозможно. Теорема доказана.

Литература

1. Скиба, А.Н. *H*-перестановочные подгруппы / А.Н. Скиба // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2003. – № 4(19). – С. 37–39.

2. Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп). – 17-е изд. – Новосибирск : Ин-т математики, 2010.

3. Тютянов, В.Н. О наследственно *G*-перестановочных подгруппах спорадических групп / В.Н. Тютянов, П.В. Бычков // Вестник Полоцкого университета. – 2008. – № 3. – С. 23–29.

4. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. – London : Clarendon Press, 1985. – 252 p.

5. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein. – New York : Harper and Row, 1968. – 527 p.

6. Wiegold, J. The factorization of the alternating and symmetric groups / J. Wiegold, A.G. Williamson // Math. Z. – 1980. – Vol. 175. – P. 171–179.

7. Guralnick, R.M. Subgroups of prime power index in simple groups / R.M. Guralnick // J. Algebra. – 1983. – Vol. 175. – P. 171–179.

[1]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

[2]Международный университет «МИТСО»
Гомельский филиал

Поступило 10.04.12