

УДК 532.5

ГИДРОМЕХАНИКА

П. И. ПЛОТНИКОВ

О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 9 VI 1975)

В работе доказано существование решений некоторых задач о пространственных течениях идеальной несжимаемой жидкости. В рассматриваемых задачах граница области течения $D \subset R^3$ состоит из двух связанных компонент S_0, S_1 , первая из которых задана уравнением $\Phi(x) = 0$, а вторая является неизвестной. Требуется найти поверхность S_1 и потенциал течения — гармоническую функцию $u(x)$, определенную в D и удовлетворяющую краевым условиям

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad S_0 \cup S_1; \quad |\nabla u| = g/\lambda, \quad S_1; \quad (1)$$

здесь $g(x)$ — заданная силовая функция, равная 1 в случае, когда массовые силы отсутствуют, λ — искомая постоянная.

1. Следуя ⁽¹⁾, сведем исходную задачу к задаче об отображении трехмерных слоев.

Если $\nabla u(x) \neq 0, x \in D$, то, согласно теореме Фробениуса, найдутся функции v, w , удовлетворяющие в окрестности x равенству

$$\nabla u - \nabla v \times \nabla w = 0. \quad (2)$$

Поверхности уровня v, w являются поверхностями тока.

Соотношения (2) дают систему уравнений для определения вектор-функции W с компонентами u, v, w . Переходя к обратным функциям, получим систему уравнений (3) для $x(W)$

$$x_u - x_v \times x_w = 0. \quad (3)$$

Если якобиан отображения $x(W)$ отличен от нуля, то решение (3), определенное в полосе $\Omega: 0 < w < h$, ограниченной плоскостями $\Gamma_j: w = j$, удовлетворяющее граничным условиям

$$|x_u|^2 = \lambda/g, \quad \Gamma_h; \quad \Phi(x) = 0, \quad \Gamma_0, \quad (4)$$

дает решение задачи (1) в области $D = x(\Omega)$ со свободной поверхностью $S_1 = x(\Gamma_h)$.

Пусть $x_0(W, \varepsilon)$ — некоторое известное приближенное решение (3), (4), зависящее от параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Будем искать решения (3), (4), лежащие в окрестности x_0 , возмущая S_0 и силовую функцию g .

Предполагая, что x_0 допускает однолистное продолжение в окрестность Ω , введем новую искомую вектор-функцию $z, x_0(z, \varepsilon) = x$, так, чтобы x_0 соответствовало тождественное отображение $z_0(W) = W$. После замены переменных приходим к следующей задаче для z :

$$L(z) = 0, \quad \Omega; \quad B(z) = 0, \quad \Gamma_h; \quad z^3 = \varepsilon \Phi_0(z), \quad \Gamma_0; \quad (5)$$

где

$$L(z) = |G|^{-1/2} G z_u - z_v \times z_w, \quad B(z) = (G z_u, z_u) - \lambda/g,$$

z^i — компоненты вектора z , Φ_0 — функция, задающая возмущение поверхности S_0 , G — матрица с элементами

$$G_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial z^i} x_0(z, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial z^j} x_0(z, \varepsilon) \right),$$

$|G|$ — ее определитель.

Предполагается: а) матрица G диагональна, ее элементы удовлетворяют неравенствам $G_{ii} > \alpha > 0$;

б) функции G_{ii} , Φ_0 , g , зависящие от z , ε , четны, 2π -периодичны по z^1, z^2 и принадлежат пространству $C^5(D_0 \times [0, \varepsilon_0])$, где D_0 — полоса $-\delta < z^3 < \delta$;

в) тождественное отображение z_0 является приближенным решением (5):

$$\|L(z_0)\|_{C^5(\Omega)}, \|B(z_0)\|_{C^5(\Gamma_h)} \leq \alpha^{-1}(\varepsilon + |\lambda - \lambda_0|);$$

здесь $\alpha, \delta, \lambda_0$ — некоторые положительные постоянные.

Пусть H_n^1 — гильбертово пространство 2π -периодических по u, v вектор-функций $z: \Omega \rightarrow R^n$, обладающих конечными нормами:

$$\|z\|_l^2 = \|z\|_{W_2^1(\omega)}^2 + \|z_u\|_{W_2^1(\omega)}, \quad \omega = \{W: |u|, |v| < \pi\} \cap \Omega;$$

V_n^1 — подпространство H_n^1 , состоящее из вектор-функций, компоненты которых z^i четны по u при $i \neq 1$ и нечетны при $i = 1$; V — подпространство V_3^4 , состоящее из вектор-функций, удовлетворяющих следующему условию нормировки:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (z_w^2 - z_v^3) du = 0, \quad \Omega.$$

Из теорем вложения вытекает, что $V \subset C^2(\Omega)$.

Теорема. Пусть G и g удовлетворяют условию

$$\frac{\partial}{\partial w} B(z_0) > 0 \quad \text{при } w = h, \quad \lambda = \lambda_0, \quad \varepsilon = 0. \quad (6)$$

Тогда существует постоянная $k > 0$ такая, что при $\varepsilon \in [0, k]$ задача (5) имеет по крайней мере одно решение $z, z - z_0 \in V$, гомеоморфно отображающее Ω на некоторую область $D \subset D_0$.

Неравенство (6) является основным ограничением на рассматриваемый класс течений. Оно означает, что на свободной поверхности, соответствующей x_0 , вектор градиента давления направлен «из жидкости».

Примеры. Если силовая функция имеет вид $g = x^3 + \varepsilon g_0(x)$, то, полагая $z = x$, получим решение задачи (1) в бесконечном слое с нижней граничной поверхностью S_0 , заданной уравнением $x^3 = \varepsilon \Phi_0(x)$.

Течения при $g = 1$. Введем переменные z^i по формулам

$$\varepsilon x^1 = Q \cos \varepsilon z^2, \quad \varepsilon x^2 = Q \sin \varepsilon z^2, \quad x^3 = e^{z^3} \sin z^1;$$

здесь

$$Q = 1 - \varepsilon e^{z^3} \cos z^1.$$

Координатная поверхность $z^3 = r$ — тор, полученный вращением окружности радиуса e^r вокруг оси Ox^3 , проходящей на расстоянии $1/\varepsilon$ от центра этой окружности.

Полагая в (4) $g = 1$, получим для z задачу (5) с диагональной матрицей G , элементы которой

$$G_{22} = Q^2, \quad G_{11} = G_{33} = e^{2z^3}$$

удовлетворяют всем условиям теоремы. Отсюда вытекает разрешимость задачи (1) в случае, когда S_0 близка к тору $z^3 = 0$, а число $\varepsilon = 1/m$ достаточно мало.

2. Так как линеаризация задачи (5) приводит к оператору, не обладающему ограниченным обратным, то будем искать ее решение, комбинируя расширение системы уравнений с регуляризацией граничных условий. Введем дополнительную искомую функцию q и рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} L(z) + z_u \times \nabla q &= 0, \Omega; \\ \left(z_v \frac{\partial}{\partial w} - z_w \frac{\partial}{\partial v}, G z_u \right) + |G|^{-1/2} q_{uu} &= 0, \Omega; \\ z^3 - \varepsilon \Phi_0(z) &= 0, \Gamma_0; \quad q = 0, \quad \Gamma_0 \cup \Gamma_h; \\ v(z_u \times z_v, \Delta z) - B(z) &= 0, \Gamma_h; \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2},$$

$v \in [0, 1]$ — параметр регуляризации.

Если $q, z \in C^2(\Omega)$ — решение задачи (7) при $v=0$ — таково, что $\|z - z_0\|_{C^1(\Omega)} < 1$, то z является решением (5).

Пусть Z — вектор с компонентами $z - z_0, q, \lambda - \lambda_0$; U_n^l — ортогональное дополнение к V_n^l ; $U_n^{l-1/2}(\Gamma_i)$ — пространство следов функций из U_n^l на Γ_i ; V_0 — подпространство V_1^4 , состоящее из функций, обращающихся в нуль на Γ_i ; F — замыкание V_1^4 в норме $W_2^3(\omega)$.

Левые части уравнений и граничных условий (7) определяют зависящий от параметров ε, v оператор A , действующий из пространства $H = V \times V_0 \times R^1$ в пространство $E = U_3^3 \times F \times U_1^{1/2}(\Gamma_0) \times U_1^{3/2}(\Gamma_h)$. Задача (7) может быть записана в виде уравнения

$$A(Z) = 0.$$

Лемма 1. *Существуют не зависящие от v постоянные $c_i > 0, i=0, 1, 2$, такие, что при $\varepsilon \in [0, c_0]$ для любого решения задачи (7), лежащего в шаре $\|Z\|_H \leq c_1$, справедлива оценка*

$$\|Z\|_H \leq c_2 \varepsilon.$$

Доказательство опирается на энергетическую оценку для решения линеаризованной задачи (7), при выводе которой существенно используется условие (6).

Лемма 2. *Пусть $v > 0$ и Z_ε — семейство решений (7), непрерывно зависящих от параметра $\varepsilon \in [0, c_0]$, $Z_0 = 0$. Существует не зависящая от v постоянная $c_3 > 0$ такая, что при $\varepsilon, \|Z_\varepsilon\|_H \leq c_3$ линейное уравнение $A'(Z_\varepsilon)X = Y$ разрешимо для любого $Y \in E$ и справедлива оценка*

$$\|X\|_H \leq c(v) \|Y\|_E.$$

Доказательство опирается на результаты ⁽²⁾ и основано на том, что при $v > 0$ задача (7) после линеаризации распадается на две эллиптические задачи для вектор-функций

$$\frac{\partial}{\partial u} X, \quad \int_{-\pi} X du.$$

Из лемм 1, 2 вытекает, что при $v > 0$ множество значений ε , для которых уравнение $A(Z) = 0$ имеет решение, лежащее в шаре $\|Z\|_H \leq c_1$, открыто и замкнуто в интервале $[0, k]$, $k = \min(c_3, c_1/c_2)$, и, следовательно, совпадает с ним. Так как шар $\|Z\|_H \leq c_1$ компактно вкладывается в $C^2(\Omega) \times R^1$, то, устремляя v к нулю, получаем утверждение теоремы.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
19 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. А. Лаврентьев, В кн. Современные проблемы теории аналитических функций, М., «Наука», 1966, стр. 179. ² S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Commun. Pure and Appl. Math., v. 17, 35 (1964).