

Е. И. ПУСТЫЛЬНИК

О СООТНОШЕНИЯХ ПОДЧИНЕННОСТИ ДЛЯ ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 24 IV 1975)

1. Теория дифференциальных уравнений в банаховых пространствах широко использует соотношения подчиненности между различными линейными операторами*. Весьма полезными при этом оказываются теоремы, связывающие подчиненность самих операторов с подчиненностью их дробных степеней, — например, в качественной теории уравнений с возмущенными операторами⁽¹⁾. Более тонкие результаты можно получить здесь, переходя к более широким классам функций от операторов; сошлемся, в частности, на работу⁽²⁾, где к дробным степеням подключен логарифм.

В настоящей работе исследуются соотношения подчиненности для некоторых классов функций, включающих в себя дробные степени и логарифмы как частные случаи. При этом рассматриваются положительные самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве, функции которых определяются с помощью спектрального разложения

$$\varphi(A) = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) dP_{\lambda}. \quad (1)$$

Отметим, что подчиненность функций самосопряженных операторов изучалась также в⁽³⁾ для некоторых классов аналитических функций, в данной работе аналитичность функций не предполагается.

2. Непрерывную функцию $\varphi(\lambda)$, $0 < \lambda < \infty$, будем называть Φ -функцией, если она положительна и возрастает вместе с функцией $\varphi^*(\lambda) = \lambda\varphi^{-1}(\lambda)$; множество всех Φ -функций обозначим через $\mathfrak{M}$. В^(4, 5) выяснена важная роль Φ -функций при изучении симметричных пространств, в⁽⁶⁾ исследовались условия ограниченности и полной непрерывности Φ -функций самосопряженного оператора. К Φ -функциям относятся все положительные возрастающие вогнутые функции; с другой стороны, для произвольной $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{M}$ существует эквивалентная ей вогнутая Φ -функция $\tilde{\varphi}(\lambda)$, т. е. $\varphi(\lambda) \leq \tilde{\varphi}(\lambda) \leq 2\varphi(\lambda)$. Общность дальнейших результатов не ограничивается, если предположить $\varphi(\lambda)$ дифференцируемой. В этом случае $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда она возрастает и $\lambda\varphi'(\lambda) \leq \varphi(\lambda)$.

Рассмотрим функцию $\Phi(t) = \ln \varphi(e^t)$, $0 < t < \infty$. Назовем $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{M}$ сильно или слабо вогнутой в зависимости от того, вогнута или выпукла $\Phi(t)$. Примером сильно вогнутой функции может служить $\ln^{\tau}(1+\lambda)$, $0 < \tau < 1$, примером слабо вогнутой — $\sqrt{\lambda^2 + k\lambda}$. Дробные степени λ^{τ} , $0 < \tau < 1$, и только они являются одновременно и сильно и слабо вогнутыми. Для дифференцируемой $\varphi(\lambda)$ сильная (слабая) вогнутость эквивалентна убыванию (возрастанию) отношения $\lambda\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)$. Легко видеть, что сумма и суперпозиция двух сильно (слабо) вогнутых функций есть снова сильно (слабо) вогнутые функции; то же можно сказать и о произведении, если

* Оператор A подчинен оператору B в некотором нормированном пространстве, если $D(B) \subset D(A)$ и $\|Ax\| \leq C\|Bx\|$ для всех $x \in D(B)$.

оно является Φ -функцией. Если $\varphi(\lambda)$ сильно вогнута, то $\varphi^*(\lambda) = \lambda\varphi^{-1}(\lambda)$ и $\psi(\lambda) = \varphi^{-1}(\lambda^{-1})$ слабо вогнута, и наоборот. Положим $c = \varphi^2(1)$, тогда $\varphi(\lambda) \leq c\psi(\lambda)$ при всех $\lambda > 0$, если $\varphi(\lambda)$ сильно вогнута, и $\varphi(\lambda) \geq c\psi(\lambda)$, если $\varphi(\lambda)$ слабо вогнута. Указанная связь между сильно и слабо вогнутыми функциями позволяет ограничиваться доказательством различных теорем для сильно вогнутых функций, а результаты для слабо вогнутых получать как следствия.

Более сложный вид имеет связь между сильно вогнутыми и произвольными Φ -функциями.

Теорема 1. Для любого $k > 0$ и произвольной Φ -функции $\varphi(\lambda)$ найдется такая сильно вогнутая функция $\tilde{\varphi}_k(\lambda)$, что при $\lambda \leq k$ справедливо неравенство $\varphi(\lambda) \leq \tilde{\varphi}_k(\lambda) \leq \varphi(\sqrt{k}\lambda)$.

3. Неотрицательный функционал $I[\varphi(\lambda)]$ назовем регулярным на некотором множестве Φ -функций $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, если

$$I[\varphi(\lambda)] \leq C\varphi(I[\lambda]), \quad \varphi(\lambda) \in \mathfrak{N}. \quad (2)$$

Примером функционала, регулярного на всем $\mathfrak{M}$, может служить

$$I[\varphi] = \frac{1}{\mu(D)} \int_D \varphi(|x(s)|) \mu(ds),$$

его регулярность следует из неравенства Иенсена. На множестве функций λ^τ , $0 < \tau < 1$, регулярен функционал $I[\lambda^\tau] = M[\alpha(1-\tau) + \beta\tau]/M(\alpha)$, построенный по произвольной неотрицательной логарифмически выпуклой на $[\alpha, \beta]$ функции $M(\lambda)$.

Теорема 2. Пусть неотрицательный на $\mathfrak{M}$ функционал $I[\varphi]$ удовлетворяет условиям: а) $I[k\varphi] = kI[\varphi]$ ($k \geq 0$), б) $I[\varphi] \leq I[\psi]$, если $\varphi[\lambda] \leq \psi[\lambda]$, в) $I[\lambda^\tau] \leq C(I[\lambda])^\tau$, $0 < \tau < 1$.

Тогда неравенство (2) справедливо с той же константой C для всех сильно вогнутых функций.

Эта теорема позволяет переносить различные известные неравенства для дробных степеней операторов на сильно и слабо вогнутые функции от этих операторов.

Теорема 3. Пусть A — положительный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H_1 , а B — положительный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H_2 . Пусть T — ограниченный линейный оператор, действующий из H_2 в H_1 и $\|T\| \leq N$. Пусть, наконец, произведение ATB является ограниченным оператором, действующим из H_2 в H_1 .

Тогда для любой сильно вогнутой функции $\varphi(\lambda)$ оператор $\varphi(A)T\varphi(B)$ также действует из H_2 в H_1 и

$$\|\varphi(A)T\varphi(B)\| \leq N\varphi^2\left(\sqrt{\frac{\|ATB\|}{N}}\right). \quad (3)$$

Для доказательства этой теоремы нужно доказать регулярность функционала $I[\varphi] = (N^{-1}\|\varphi(A)T\varphi(B)\|)^{1/2}$ на множестве сильно вогнутых функций. Это вытекает из теоремы 2, так как условия а), б) выполняются очевидно, а регулярность функционала $I[\varphi]$ на степенных функциях следует из логарифмической выпуклости функции $M(\tau) = \|A^\tau TB^\tau\|$, доказанной в (7) (см. также (8)).

Если операторы A и B ограничены по норме некоторым числом k , то из теоремы 1 вытекает, что для любой Φ -функции $\varphi(\lambda)$

$$\|\varphi(A)T\varphi(B)\| \leq N\varphi^2\left(\frac{k^2\|ATB\|}{N}\right)^{1/4}. \quad (4)$$

Теорема 3 позволяет выводить из подчиненности операторов A и B подчиненность некоторых их функций.

Теорема 4. Пусть для положительных самосопряженных операторов A и B справедливо соотношение

$$\|ATx\|_{H_1} \leq C \|Bx\|_{H_2}, \quad x \in D(B), \quad (5)$$

где T удовлетворяет условиям теоремы 3.

Тогда для любой сильно вогнутой функции $\varphi(\lambda)$

$$\|\varphi(A)Tx\|_{H_1} \leq C_1 \|\varphi^{-1}(B^{-1})x\|_{H_2}, \quad x \in D(\varphi^{-1}(B^{-1})), \quad (6)$$

и для любой слабо вогнутой функции $\psi(\lambda)$

$$\|\psi^{-1}(A^{-1})Tx\|_{H_1} \leq C_2 \|\psi(B)x\|_{H_2}, \quad x \in D(\psi(B)), \quad (7)$$

где $C_1 = N\varphi^2(\sqrt{C/N})$, $C_2 = N\psi^{-2}(\sqrt{N/C})$.

Неравенства (6) и (7) обобщают известное первое неравенство Гайнца⁽⁹⁾, согласно которому из $\|Ax\| \leq \|Bx\|$, $x \in D(B)$, вытекает, что $\|A^{\tau}x\| \leq \|B^{\tau}x\|$, $x \in D(B^{\tau})$. Аналогично обобщается и второе неравенство Гайнца.

Теорема 5. Пусть A и B удовлетворяют условиям теоремы 3 и пусть F — замкнутый линейный оператор с областью определения $D(F) \subset H_1$ и областью значений $R(F) \subset H_2$. Пусть $D(A) \subset D(F)$, $D(B) \subset D(F^*)$ и для любых $x \in D(A)$, $y \in D(B)$ справедливы неравенства $\|Fx\|_{H_2} \leq \|Ax\|_{H_1}$, $\|F^*y\|_{H_1} \leq \|By\|_{H_2}$.

Тогда для любой сильно вогнутой функции $\varphi(\lambda)$ и тех же x, y справедливы неравенства

$$|(Fx, y)| \leq \|\varphi^{-1}(A^{-1})x\|_{H_1} \|\varphi^*(B)y\|_{H_2}. \quad (8)$$

$$|(Fx, y)| \leq \|\varphi^*(A)x\|_{H_1} \|\varphi^{-1}(B^{-1})y\|_{H_2}.$$

Напомним, что $\varphi^*(\lambda) = \lambda\varphi^{-1}(\lambda)$ есть слабо вогнутая функция; взяв ее в качестве основной, легко записать утверждение теоремы для слабо вогнутых функций.

Отметим в заключение пункта, что с помощью теоремы 1 условия сильной (слабой) вогнутости во всех предыдущих утверждениях можно заменить требованием, чтобы $\varphi(\lambda)$ была эквивалентна какой-нибудь сильно (слабо) вогнутой функции при больших λ , что скажется только на константах в неравенствах.

5. Если замкнутый линейный оператор B подчинен Φ -функции положительного самосопряженного оператора: $\|Bx\| \leq C \|\varphi(A)x\|$ ($x \in D(\varphi(A))$), то, как показано в⁽⁶⁾, справедливо, обобщенное неравенство моментов

$$\|Bx\| \leq 2C\varphi\left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right) \|x\|, \quad x \in D(A). \quad (9)$$

Возникает вопрос, можно ли по соотношению (9) делать обратное заключение о подчиненности оператора B некоторой (пусть не той же самой) функции оператора A . Такого рода результаты известны для дробных степеней положительно определенного оператора A , т. е. удовлетворяющего неравенству $(Ax, x) \geq a(x, x)$, где $a > 0$. А именно, если $\varphi(\lambda) = \lambda^{\tau}$, то B подчинен $A^{\tau+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$. Доказательство этого факта (см. ^(1, 8)) основано на интегральном представлении дробных степеней через резольвенту оператора A , которое не переносится на произвольные вещественные Φ -функции, поэтому доказательство общего утверждения опирается на другие идеи.

Теорема 6. Пусть A — положительно определенный самосопряженный оператор с нижней гранью a . Пусть B — замкнутый линейный оператор, удовлетворяющий условию (9) для некоторой Φ -функции $\varphi(\lambda)$, при чем $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi(\lambda) = \infty$.

Тогда оператор B подчинен любой Φ -функции $\psi(A)$, для которой

$$\int_a^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda \psi(\lambda)} d\lambda < \infty. \quad (10)$$

Доказательство теоремы проводят вначале для дифференцируемых $\psi(\lambda)$, используя представление

$$\psi^{-1}(A) = \int_a^{\infty} \frac{\psi'(\lambda)}{\psi^2(\lambda)} P_{\lambda} d\lambda, \quad (11)$$

где P_{λ} — разложение единицы, соответствующее оператору A , и интеграл понимается в смысле сильной сходимости. Это представление выводится из (1) интегрированием по частям. В силу замкнутости B

$$B\psi^{-1}(A)x = \int_a^{\infty} \frac{\psi'(\lambda)}{\psi^2(\lambda)} BP_{\lambda}x d\lambda, \quad x \in D(A),$$

и для доказательства теоремы достаточно показать ограниченность интеграла в правой части. В силу неравенств $\|P_{\lambda}x\| \leq \|x\|$, $\|AP_{\lambda}x\| \leq \lambda\|x\|$ из (9) вытекает, что $\|BP_{\lambda}x\| \leq 2C\varphi(\lambda)\|x\|$; кроме того, $\psi'(\lambda) \leq \psi(\lambda)/\lambda$, откуда

$$\|B\psi^{-1}(A)x\| \leq 2C \int_a^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda \psi(\lambda)} d\lambda \|x\|, \quad x \in D(A),$$

и теорема доказана. Доказательство для недифференцируемых $\psi(\lambda)$ легко осуществляется предельным переходом.

Если $\varphi(\lambda)$ не стремится к бесконечности при $\lambda \rightarrow \infty$, то $\varphi(\lambda)$ асимптотически линейна. Для подобных функций применимо более сильное утверждение.

Теорема 7. Пусть положительная возрастающая функция $\varphi(\lambda)$ для достаточно больших λ эквивалентна линейной функции: $\varphi(\lambda) \leq \alpha + \beta\lambda \leq k\varphi(\lambda)$ ($\lambda > \lambda_0$) и пусть операторы A и B удовлетворяют условиям теоремы 6.

Тогда оператор B подчинен этой же функции $\varphi(A)$.

Отметим, что в последней теореме $\varphi(\lambda)$ не обязана быть Φ -функцией. В теореме 6 также можно ослабить требования к $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$, предполагая лишь эквивалентность их каким-то Φ -функциям при достаточно больших λ . Это позволяет рассматривать функции типа $\lambda^{\tau} |\ln \lambda|^{\sigma}$. В частности, если $\|Bx\| \leq C\|Ax\|^{\tau}\|x\|^{1-\tau}$, то B подчинен $A^{\tau} |\ln A|^{\sigma}$ при любом $\sigma > 1$, что сильнее результата, приведенного выше.

Воронежский технологический институт

Поступило
24 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», 1967. ² П. Е. Соболевский, А. И. Ясаков, Дифференциальные уравнения, № 8 (1971). ³ С. Foias, J. L. Lions, Acta Sci. Math. Szeged, v. 22, 269 (1964). ⁴ П. П. Забрёйко, Тр. Воронежск. семинара по функциональному анализу, в. 8, 3 (1966). ⁵ Е. М. Семенов, ДАН, т. 156, № 6, 1292 (1964). ⁶ Е. И. Пустыльник, ДАН, т. 186, № 6, 1269 (1969). ⁷ Т. Kato, Math. Ann., v. 125, 208 (1952). ⁸ М. А. Красносельский и др., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, «Наука», 1966. ⁹ E. Heinz, Math. Ann., v. 123, 415 (1951). ¹⁰ П. Е. Соболевский, ДАН, т. 155, № 1, 50 (1964).