

УДК 519.95

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Ю. П. ПЫТЬЕВ

МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 6 VI 1975)

Как известно, в проблеме автоматического анализа изображений одной из основных является задача морфологического анализа. Морфологический аспект лежит в основе задач синтеза читающих автоматов, трекового анализа в физике высоких энергий ⁽¹⁾, анализа папиллярных узоров в криминалистике ⁽²⁾ и т. д.

1. Под изображением будем понимать измеримую по Борелю функцию, определенную на подмножестве X плоскости, называемом далее полем зрения.

Определение. Будем говорить, что на (измеримом) подмножестве $\bar{X} \subset X$ форма изображения $\tilde{f}(x)$, $x \in \bar{X}$, не сложнее, чем форма изображения $f(x)$, $x \in X$, и писать $\tilde{f}(x) < f(x)$, $x \in \bar{X}$, если $\tilde{f}(x) = F(f(x))$, $x \in \bar{X}$, для некоторой борелевской функции $F(\cdot)$. Если $\tilde{f}(x) < f(x)$, $f(x) < \tilde{f}(x)$, $x \in \bar{X}$, то будем говорить, что на $\bar{X}$ изображения $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ совпадают по форме, или изоморфны.

Смысл определения состоит в том, что в изображении $F(f(x))$ могут быть «склеены» уровни яркости, различные в изображении $f(x)$.

Лемма. Пусть $\sigma(f)$ — минимальная σ -алгебра, относительно которой измеримо изображение $f(x)$, $x \in X$. При этом $\tilde{f}(x) < f(x)$, $x \in X$, тогда и только тогда, когда $\sigma(f)$ -измеримо изображение $\tilde{f}(x)$, $x \in X$, или иначе $\sigma(\tilde{f}) \subset \sigma(f)$.

Лемма позволяет отождествить форму $f(x)$, $x \in X$, с $\sigma(f)$.

Если $\mathfrak{B}$ — борелевская алгебра множеств на X , то по определению каждое мыслимое изображение имеет форму, которая не сложнее $\mathfrak{B}$. С другой стороны, форма изображения $f(x) = \text{const}$, $x \in X$, не сложнее, чем форма любого другого изображения.

На множестве изображений операция сравнения $<$ определяет лишь частичный порядок, причем последний, очевидно, не может быть согласован со структурой линейного пространства. Но множество $L_{\sigma(f)}$ изображений, форма которых не сложнее $\sigma(f)$, является линейным подпространством.

Пусть R — отношение эквивалентности на множестве L изображений, согласно которому эквивалентными считаются изоморфные изображения. Объектами морфологического анализа являются классы R -эквивалентных изображений, образующие фактор-пространство L/R ; последние, очевидно, не образуют линейных подпространств L .

В прикладных задачах анализа изображений полезно следующее расширение понятия формы. Пусть G — множество измеримых преобразований X , $\bar{X}$ — измеримое подмножество X . Будем говорить, что G -форма изображения $\tilde{f}(x)$ на $\bar{X}$ не сложнее, чем G -форма изображения $f(x)$, если $\tilde{f}(x) = F(f(gx))$, $x \in \bar{X}$, для некоторого преобразования $g \in G$ и борелевской функции $F(\cdot)$.

Таким образом, например, с группой G евклидовых движений X связывается понятие евклидовой формы изображения, инвариантной относительно этой группы.

Если доступны дополнительные морфологические данные, то целесообразно соответственно сузить класс $\mathcal{F}$ функций сравнения $F(\cdot)$. Если, например, можно считать сравнимыми по форме лишь изображения с монотонным соответствием яркостей, то естественно определить, что $\tilde{f}(x) < f(x)$, $x \in \bar{X}$, если $\tilde{f}(x) = F(f(x))$, $x \in \bar{X}$, для некоторой монотонно неубывающей функции $F(\cdot)$. В этом случае, в частности, негатив и позитив считаются несравнимыми по форме.

Класс $\mathcal{F}$ теперь является выпуклым конусом в пространстве борелевских функций, а множество $L_f \subset L_{\sigma(f)}$ изображений, форма которых не сложнее формы f , является выпуклым конусом в L .

Для прикладных задач представляет интерес следующий результат по аппроксимации формы.

Теорема 1. Пусть $f(x)$, $x \in X$ — ограниченное снизу изображение и $\sigma(f)$ — его форма. Существует монотонно неубывающая последовательность изображений $\{f_n\}$, принимающих конечное число значений, обладающая следующими свойствами:

- 1) $f_1(x) < \dots < f_n(x) < \dots < f(x)$, $x \in X$;
- 2) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow f_n(x)$, $x \in X$;

$$3) \sigma(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f_n) = \bigcup_1^\infty \sigma(f_n).$$

Варьируя класс функций $F(\cdot)$, можно получить и другие полезные морфологические результаты. Если, например, $F(\cdot)$ выбираются из класса $\mathcal{F}$ линейных функций

$$F(z) = \alpha z + \beta, \quad -\infty < z < \infty,$$

то сравнимыми по форме будут лишь изображения, совпадающие с точностью до параметров яркости и контраста.

Если $\mathcal{F}$ — выпуклое множество в множестве борелевских функций на прямой, то, очевидно, множество

$$L_f = \{\tilde{f}(x) = F(f(x)), F \in \mathcal{F}\}$$

изображений, форма которых не сложнее, чем форма f , выпукло в L . Условимся в этом случае говорить о $\mathcal{F}$ -форме изображений.

2. Пусть μ — полная положительная мера на пополнении $\bar{\mathfrak{B}}$ борелевской алгебры $\mathfrak{B}$. Под изображением будем понимать μ -измеримую функцию, для которой «энергия»

$$\|f\|^2 = \int_X f^2(x) d\mu(x) < \infty.$$

Поскольку в терминах энергии изображения, совпадающие μ -почти всюду на X , неразличимы, естественно считать $\tilde{f} < f$, если $\tilde{f}(x) = F(f(x))$ μ -почти всюду на X . При этом под формой следует понимать минимальную σ -алгебру $\bar{\sigma}(f)$, порожденную множествами из $\sigma(f) \cup N$, где N — класс множеств нулевой меры. Множество изображений в этом случае образует лебеговский класс L_μ^2 .

Пусть L_σ — линейное подпространство L_μ^2 изображений, форма которых не сложнее σ , и P_σ — ортогональный проектор на L_σ . Так как включение $\bar{\sigma} \subset \sigma$ эквивалентно неравенству $P_{\bar{\sigma}} \leq P_\sigma$, то теперь форму изображения f можно определить как оператор $P_{\bar{\sigma}(f)}$. Всякое изображение $\tilde{f} < f$ является собственной функцией $P_{\bar{\sigma}(f)}$:

$$P_{\bar{\sigma}(f)} \tilde{f} = \tilde{f},$$

причем

$$\tilde{f} < f \leftrightarrow P_{\bar{\sigma}(f)} \tilde{f} = \tilde{f} \leftrightarrow \bar{\sigma}(\tilde{f}) \subset \bar{\sigma}(f).$$

Пусть $L_f \subset L_\mu^2$ — выпуклое замкнутое множество изображений, $\mathcal{F}$ -форма которых не сложнее $\mathcal{F}$ -формы f , и P_f — проектор на L_f . P_f , вообще го-

вора, нелинейный оператор, но как и выше

$$\tilde{f} < f \leftrightarrow P_j \tilde{f} = \tilde{f}.$$

$\mathcal{F}$ -форма изображения f , таким образом, может быть определена как оператор P_j .

Рассмотрим вопрос об аппроксимации формы изображения с конечной энергией. Пусть $\{\sigma_n\}$ — последовательность булевых алгебр, порожденных

соответственно измеримыми разбиениями $X = \bigcup_{i=1}^{s_n} A_i^{(n)}, A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)} = \emptyset,$

$i \neq j, \mu(A_j^{(n)}) > 0, i=1, 2, \dots, s_n, n=1, 2, \dots; P^{(n)}$ — ортогональный проектор на L_{σ_n} и σ — минимальная σ -алгебра, содержащая все множества $A_i^{(n)}, i=1, 2, \dots, s_n, n=1, 2, \dots$. Предположим, что $(n+1)$ -е разбиение X получается из n -го дроблением одного из множеств $A_i^{(n)}$ на два измеримых подмножества положительной меры. Имеет место следующий результат.

Теорема 2. 1) $P_\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow P^{(n)}$ (сильный предел).

2) Множество $\{\psi_j\}$ собственных функций одномерных проекторов $P_j = P^{(j)} - P^{(j-1)}, P^{(0)} = 0, j=1, 2, \dots$, образует ортогональный базис L_σ .

Базис $\{\psi_j\}$ удобен в задачах аппроксимации изображений, форма которых не сложнее σ .

3. Рассмотрим простейшие решающие алгоритмы в задачах морфологического анализа изображений. Пусть $A \in \bar{\sigma}(f)$ и $\chi(x), x \in X$, — индикатор A . Если $\|\chi\Phi\| > 0$, то

$$\|P_{\bar{\sigma}(f)} \chi\Phi\| / \|\chi\Phi\| \leq 1,$$

причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x) = \chi(x)F(f(x)) + [1 - \chi(x)]\psi(x) \pmod{\mu}$$

для некоторой функции сравнения $F(\cdot)$ и некоторого изображения ψ . Этот результат позволяет решить задачу выделения объекта

$$\tilde{f}(x) = \chi(x)F(f(x)), \quad \tilde{f}(x) < f(x), \quad x \in A,$$

на фоне произвольного изображения ψ ($F(\cdot)$ неизвестна) ⁽³⁾.

Обозначим $\mathcal{A}$ алгебру, порожденную разбиением $X = A \cup (X \setminus A)$, $\bar{\sigma}$ — минимальную σ -алгебру, содержащую $\mathcal{A}$ и заданную σ -алгебру σ . Если

$$n_f = \|(I - P_{\bar{\sigma}})\chi f\| > 0, \quad n_\varphi = \|(I - P_{\bar{\sigma}})\chi\Phi\| > 0,$$

то

$$|((I - P_{\bar{\sigma}})\chi f, \varphi)| / (n_f n_\varphi) \leq 1,$$

причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x) = \chi(x)[\alpha f(x) + \psi(x)] + [1 - \chi(x)]\tilde{\psi}(x) \pmod{\mu}$$

для некоторой постоянной α и некоторых изображений $\psi \in L_\sigma$ и $\tilde{\psi}$. Этот результат позволяет выделить изображение $\alpha\chi f$ (яркость α неизвестна), искаженное аддитивной помехой ψ , о которой известно лишь, что ее форма не сложнее σ . Фон $\tilde{\psi}$ при этом произволен.

Пусть алгебра σ порождена измеримым разбиением $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \cap A_j = \emptyset,$

$i \neq j$. Обозначим P ортогональный проектор на замкнутую линейную обо-

лочку системы $\{f\chi_i\}$, где $\chi_i(x)$ — индикатор A_i . Тогда для всякого изображения $\varphi \neq 0$

$$\|P\varphi\|/\|\varphi\| \leq 1,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x) = \psi(x)f(x) \pmod{\mu}$$

для некоторого изображения ψ , форма которого не сложнее σ . Этот факт позволяет обнаружить изображение f , искаженное мультипликативной помехой ψ , о которой известно лишь, что ее форма не сложнее σ .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Распознавание образов при помощи цифровых вычислительных машин, ТИИЭР, т. 60, № 10 (1972). ² Обработка изображений при помощи цифровых вычислительных машин, ТИИЭР, т. 60, № 7 (1972). ³ Ю. П. Пытьев, Кибернетика, № 3 (1975).