

В. И. РОЖКОВ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 1 VII 1975)

Рассмотрим сингулярно возмущенную дифференциальную систему

$$\varepsilon \dot{x} = A(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon), \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $A(t, \varepsilon)$ — квадратная $(n \times n)$ -матрица, ω -периодическая по t , $f(t, \varepsilon)$ — ω -периодический непрерывный вектор.

Для таких систем известны (см. (1-5)) следующий наиболее общий результат.

Теорема. Пусть матрица $A(t, \varepsilon)$ голоморфна по обоим переменным при всех действительных t , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и допускает равномерное асимптотическое разложение

$$A(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \varepsilon^k \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

тогда если собственные значения $\lambda_i(t)$ матрицы A_0 удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$, то уравнение (1) при достаточно малых ε имеет и единственное ω -периодическое решение $x(t, \varepsilon)$; это решение удовлетворяет неравенству

$$|x(t, \varepsilon)| \leq K_1 \max_t |f(t, \varepsilon)|,$$

где постоянная K_1 не зависит от ε и $f(t, \varepsilon)$.

В настоящей работе этот результат будет значительно обобщен и дополнен.

В дальнейшем определим нормы вектора и матрицы так:

$$|x| = \max_i |x_i|, \quad |A| = \max_i \sum_k |a_{ik}|.$$

Обозначим через C_ω пространство непрерывных ω -периодических вектор-функций (матриц) с нормой $\|u\| = \max_t |u(t)|$, а через C_ω^k — пространство ω -периодических вектор-функций (матриц), имеющих непрерывную k -ю производную.

Теорема 1. Если $A(t) \in C_\omega$ и собственные значения матрицы $A(t)$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \neq 0$, то для достаточно малых ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, при любом $f \in C_\omega$ линейная неоднородная система

$$\varepsilon \dot{x} = A(t)x + f(t) \quad (2)$$

имеет одно и только одно ω -периодическое решение $x(t, \varepsilon)$; для него справедлива оценка

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leq K \|f(t)\|, \quad (3)$$

где постоянная K не зависит от $f \in C_\omega$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Доказательство. Будем считать, что собственные значения матрицы $A(t)$ занумерованы в порядке возрастания $\operatorname{Re} \lambda$, при одинаковых

$\operatorname{Re} \lambda$ — в порядке возрастания $\operatorname{Im} \lambda$, а при одинаковых λ — произвольно. Тогда, очевидно, $\lambda_i(t) \in C_\omega$ и построенная из них диагональная $(n \times n)$ -матрица $(\lambda_i(t) \delta_{ik}) = \Lambda(t) \in C_\omega$.

Предположим сначала, что решение $x(t, \varepsilon)$ существует и получим для него оценку (3). Так как $|x(t, \varepsilon)| \in C_\omega$, то, очевидно, найдется такая точка $t_\varepsilon \in [0, \omega]$, в которой

$$|x(t_\varepsilon, \varepsilon)| = \max_t |x(t, \varepsilon)| = \|x\|. \quad (4)$$

Возьмем теперь число $\sigma > 0$, величину которого мы уточним ниже. Согласно работе (2), при этом найдется такая постоянная матрица M_σ и малое число $h = h(\sigma) > 0$, что при $t \in [t_\varepsilon - h, t_\varepsilon + h]$ справедливо соотношение

$$M_\sigma^{-1} A(t) M_\sigma = \Lambda(t_\varepsilon) + \Delta(t, \sigma); \quad |\Delta(t, \sigma)| < \sigma, \quad (5)$$

причем независимо от t_ε (т. е. от ε и f) $|M_\sigma| \leq K_\sigma$, $|M_\sigma^{-1}| \leq K_\sigma$. Произведя тогда в системе (2) замену

$$x(t) = M_\sigma v(t), \quad v(t) = M_\sigma^{-1} x(t), \quad (6)$$

для новой функции $v(t, \varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon \dot{v} = M_\sigma^{-1} A(t) M_\sigma v + M_\sigma^{-1} f(t),$$

которое, в силу (5), на $[t_\varepsilon - h, t_\varepsilon + h]$ принимает вид

$$\varepsilon \dot{v} = \Lambda(t_\varepsilon) v + \Delta(t, \sigma) v + M_\sigma^{-1} f(t). \quad (7)$$

Так как $\lambda_i(t) \in C_\omega$ и выполнено условие $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$, то, очевидно, найдется такой номер m , что

$$\operatorname{Re} \lambda_1(t) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_m(t) \leq -\kappa; \quad \operatorname{Re} \lambda_n(t) \geq \dots \geq \operatorname{Re} \lambda_{m+1}(t) \geq \kappa > 0. \quad (8)$$

В соответствии с неравенствами (8) представим n -мерный вектор v в виде $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, где v_1 — m -мерный, а v_2 — $(n-m)$ -мерные векторы; при этом (7) разделится на две подсистемы

$$\varepsilon \dot{v}_1 = \Lambda_1 v_1 + \Delta_1 v + F_1, \quad \varepsilon \dot{v}_2 = \Lambda_2 v_2 + \Delta_2 v + F_2, \quad \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = M_\sigma^{-1} f. \quad (9)$$

Интегрируя (9), получим при $a > 0$

$$v_1(t) = e^{\Lambda_1 a} v_1(t - a\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-a\varepsilon}^t e^{\Lambda_1(t-s)/\varepsilon} \{\Delta_1(s) v(s) + F_1(s)\} ds,$$

$$v_2(t) = e^{-\Lambda_2 a} v_2(t + a\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t+a\varepsilon}^t e^{-\Lambda_2(s-t)/\varepsilon} \{\Delta_2(s) v(s) + F_2(s)\} ds.$$

Так как $|\Delta(t)| < \sigma$ и в силу (8) $|e^{\Lambda_1}| \leq e^{-\kappa}$, $|e^{-\Lambda_2}| \leq e^{-\kappa}$, то из последних соотношений легко получить оценку для $v(t)$

$$|v(t)| \leq [e^{-\kappa a} + \kappa^{-1} \sigma] \max_{|t-s| \leq a\varepsilon} |v(s)| + K_\sigma \kappa^{-1} \|f\|. \quad (10)$$

Выберем теперь σ и a так: $\kappa^{-1} \sigma = 1/4$, $e^{-\kappa a} = 1/4$. При этом из (10) получим неравенство

$$|v(t)| \leq 1/2 \max_{|t-s| \leq a\varepsilon} |v(s)| + K_\sigma \kappa^{-1} \|f\|. \quad (11)$$

Последовательно применяя неравенство (11), очевидно, получим

$$|v(t)| \leq \frac{1}{2^n} \max_{|t-s| \leq na\varepsilon} |v(s)| + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) K_\sigma \kappa^{-1} \|f\|.$$

Полагая здесь $t = t_\varepsilon$, $n = 1 + [h/(2a\varepsilon)]$, в частности, получим

$$|v(t_\varepsilon)| \leq (1/2)^{h/(2a\varepsilon)} \max_{|t_\varepsilon - s| \leq h/2 + a\varepsilon} |v(s)| + 2K_\sigma \kappa^{-1} \|f\|.$$

Из последнего неравенства найдем более простое

$$|v(t_\varepsilon)| \leqslant (1/2)^{h/(2a\varepsilon)} \|v\| + 2K_\sigma \kappa^{-1} \|f\|. \quad (12)$$

Теперь из (12), (6) и (4) легко найдем

$$\|x\| \leqslant (1/2)^{h/(2a\varepsilon)} K_\sigma^2 \|x\| + 2K_\sigma^2 \kappa^{-1} \|f\|. \quad (13)$$

Мы уже выбрали a , σ и, значит, K_σ и $h=h(\sigma)>0$. Выберем теперь $\varepsilon>0$ из условия

$$(1/2)^{h/(2a\varepsilon)} K_\sigma^2 \leqslant 1/2 \quad \text{при} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Тогда при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ из (13) получим оценку (3)

$$\|x\| \leqslant 4K_\sigma^2 \kappa^{-1} \|f\|. \quad (14)$$

Остается доказать, что решение $x \in C_\omega^1$ системы (2) существует и единственно. Поскольку (2) есть линейная неоднородная система, то, как известно, достаточно доказать, что соответствующая (2) однородная система ($f=0$) имеет в C_ω^1 только нулевое решение. Последнее немедленно следует из (14) при $f(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Пусть в (1) допустимы равномерные асимптотические разложения

$$\begin{aligned} A(t, \varepsilon) &= A_0(t) + \varepsilon A_1(t) + \dots + \varepsilon^N A_N(t) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ f(t, \varepsilon) &= f_0(t) + \varepsilon f_1(t) + \dots + \varepsilon^N f_N(t) + O(\varepsilon^{N+1}). \end{aligned}$$

Подставляя в (1) вместо x ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= A_0 x_0 + f_0, \quad \dot{x}_0 = A_0 x_1 + A_1 x_0 + f_1, \quad \dots, \quad \dot{x}_{N-1} = \\ &= A_0 x_N + A_1 x_{N-1} + \dots + A_N x_0 + f_N, \end{aligned}$$

откуда при $\det A_0 \neq 0$ последовательно и однозначно определяются все ω -периодические функции $x_k(t)$, $k=0, 1, \dots, N$.

Теорема 2. Если $A \in C_\omega$, $f \in C_\omega$, $A_k \in C_\omega^{N-k}$, $f_k \in C_\omega^{N-k}$, $k=0, \dots, N$, и собственные значения $\lambda_i(t)$ матрицы $A_0(t)$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$, то ω -периодическое решение системы (1) существует, единственно и имеет следующее асимптотическое представление:

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^N x_N(t) + O(\varepsilon^{N+1}). \quad (15)$$

Доказательство. Существование и единственность $x(t, \varepsilon)$ легко следует из теоремы 1. По построению асимптотического разложения разность

$$x(t, \varepsilon) - \sum_{k=0}^N \varepsilon^k x_k(t) = \Delta_N(t, \varepsilon)$$

будет удовлетворять уравнению

$$\varepsilon \dot{\Delta}_N = A(t, \varepsilon) \Delta_N + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (16)$$

откуда по теореме 1 $\Delta_N = O(\varepsilon^{N+1})$. Теорема доказана.

Заменим теперь условие $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$, а, стало быть, и (8) на более слабое: пусть существует такой номер $m \in [1, n)$, что

$$\int_0^\omega \operatorname{Re} \lambda_m(t) dt < 0, \quad \int_0^\omega \operatorname{Re} \lambda_{m+1}(t) dt > 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_m(t) < \operatorname{Re} \lambda_{m+1}(t). \quad (17)$$

Теорема 3. Если $A \in C_\omega$, $f \in C_\omega$ и собственные значения $\lambda_i(t)$ матрицы $A_0(t)$ удовлетворяют неравенствам (17), то ω -периодическое решение системы (1) при достаточно малом ε существует и единственно.

Доказательство. Так как $\lambda_i(t) \in C_\omega$ и выполнены неравенства (17), то в C_ω можно выделить множество вещественных функций

$$S = \left\{ p(t) : p \in C_\omega; \operatorname{Re} \lambda_m(t) < p(t) < \operatorname{Re} \lambda_{m+1}(t); \int_0^t p(s) ds = 0 \right\}. \quad (18)$$

Фиксируем $p \in S$ и в уравнении (1) произведем замену ($C_\omega^1 \leftrightarrow C_\omega^1$)

$$x = z e^{\frac{1}{\varepsilon} p(t)}; \quad z = x e^{-\frac{1}{\varepsilon} p(t)}; \quad \int_0^t p(s) ds = P(t) \in C_\omega^1. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (1), для $z(t, \varepsilon)$ получим систему

$$\varepsilon \dot{z} = [A(t, \varepsilon) - p(t)E]z + f(t, \varepsilon) e^{-\frac{1}{\varepsilon} p(t)}, \quad (20)$$

причем в силу (18) собственные значения $\mu_i = \lambda_i - p$ матрицы $A_0 - pE$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \mu_i \neq 0$. Значит, по теореме 1 система (20) имеет и притом только одно ω -периодическое решение $z(t, \varepsilon)$. Подставляя его в (19), докажем теорему.

Из теоремы 1 и формул (20), (19) получим оценку

$$|x(t, \varepsilon)| \leq K Q^{1/\varepsilon}(t) \|f\|, \quad (21)$$

где введено следующее обозначение:

$$Q(t) = e^{P(t)} \|e^{-P(t)}\| = e^{\frac{P(t) - \min_t P(t)}{t}} \geq 1. \quad (22)$$

Так как $P(t) \in C_\omega^1$, то существуют точки, где $P(t)$ достигает своего наименьшего значения: $\min_t P(t) = P(t_p)$. Обозначим через E^* объединение всех таких точек t_p , т. е. $E^* = \bigcup_{p \in S} t_p$. Можно доказать, что множество $E^* \cap [0, \omega)$ имеет положительную меру.

Теорема 4. Если $A \in C_\omega$, $f \in C_\omega$, $A_k \in C_\omega^{N-k}$, $f_k \in C_\omega^{N-k}$, $k=0, \dots, N$, выполняются условия (17) и $\det A_0 \neq 0$, то на множестве E^* справедливо асимптотическое разложение (15).

Доказательство. Разность $\Delta_N(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - \sum_{k=0}^N e^k x_k(t)$ будет ω -периодическим решением системы

$$\varepsilon \dot{\Delta}_N = A(t, \varepsilon) \Delta_N + O(\varepsilon^{N+1}).$$

Поэтому для нее из (21) получим

$$|\Delta_N(t, \varepsilon)| \leq K Q^{1/\varepsilon}(t) \varepsilon^{N+1}. \quad (23)$$

Пусть $t = t_p \in E^*$, тогда существует $p \in S$, что $\min_t P = P(t_p)$, т. е. из (22)

$Q(t_p) = 1$; стало быть, из (23) $|\Delta_N(t_p)| \leq K \varepsilon^{N+1}$. Теорема доказана.

Замечание 1. На множестве E^* имеем $\dot{P} = p = 0$, так что из (17) получим $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \neq 0$ при $t \in E^*$.

Замечание 2. Если выполняются неравенства (17) и, кроме того, $\operatorname{Re} \lambda_m(t) \leq 0$, $\operatorname{Re} \lambda_{m+1}(t) \geq 0$, то можно показать, что в этом случае $E^* = \{t: \operatorname{Re} \lambda_i(t) \neq 0, 1 \leq i \leq n\}$.

Университет дружбы народов им. П. Лумумбы
Москва

Поступило
19 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ G. D. Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., v. 10, 436 (1909). ² А. Н. Тихонов, Математич. сб., т. 31 (73), № 3, 575 (1952). ³ Л. Флэтто, Н. Левинсон, Сб. пер. Математика, т. 2, 2, 61 (1958). ⁴ Д. В. Аносов, Математич., сб., т. 50, № 3, 299 (1960). ⁵ В. Вазис. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, М., «Мир», 1968. ⁶ В. И. Рожков, Дифференциальные уравнения, т. 10, № 6, 1937 (1974).