

О возможности изучения производной на основе почти аксиоматического подхода

А.В. ГАВРИЛЮК, А.А. ГАВРИЛЮК

Обосновывается новый подход к изучению производной, опирающийся на физическую наглядность и позволяющий относительно просто доказать основные теоремы о производной. При этом понятие предела функции не используется.

Ключевые слова: определение производной, изучение производной, определение предела, скорость, математический анализ.

A new approach to the study of derivatives is justified. This approach is physically interpretable and it allows to prove the main theorems about derivatives relatively easily. This approach does not use the concept of limit of the function.

Keywords: definition of derivative, studying derivative, definition of limit, speed, mathematical analysis.

В настоящей статье продолжают исследования авторов, посвящённые возможности изучения понятия производной и непрерывности без использования понятия предела [1], [2], [3].

В предыдущих работах исследовались возможности строгого построения соответствующей теории с использованием определений (определения производной или определения непрерывности), равносильных классическим (но без понятия предела). В настоящей работе мы отходим от этого требования, следуя тому пути, который традиционно используется в школьном курсе математики при изучении понятия площади фигуры. Мы предлагаем подход к изучению производной не менее «строгий» (но и не более), чем традиционно используемый подход к изучению площади. Отметим, что вопрос о существовании площади плоской фигуры (квадрируемости, измеримости по Жордану) в школьном курсе вообще не ставится. Формулы для вычисления площадей некоторых плоских фигур выводятся с использованием свойств-аксиом площади (неотрицательности, аддитивности, равенства площадей равных фигур – инвариантности площади относительно движений, формулы площади прямоугольника). Эти свойства не формулируются явно, не задано семейство измеримых подмножеств, однако, можно говорить, что этот подход является почти аксиоматическим.

Мы исходим из того, что представления о скорости формируются в современной жизни не позднее (и они не менее развиты), чем представления о площади. В самом деле, представим, что две машины движутся прямолинейно и в некоторый момент времени t_0 они поравнялись. Если скорость первой машины в момент t_0 больше, чем скорость второй, то совершенно ясно, что в этот момент первая машина ОБГОНЯЕТ вторую, иначе говоря, в течение некоторого времени до момента t_0 она была позади и в течение некоторого времени после t_0 она будет впереди второй машины. К описанному «свойству» мы добавим, что «при равномерном прямолинейном движении скорость равна отношению пути ко времени», и только на этой основе будем строить всю теорию.

Основные утверждения и обозначения

1. Скорость изменения линейной функции $L(x) = kx + b$ постоянна и равна коэффициенту k .

2. Если функция не линейна, то она может иметь разные скорости изменения в разных точках. Скорость изменения функции f в точке x_0 (в момент x_0) будем обозначать $f'(x_0)$ и называть также производной функции f в точке x_0 .

3. Будем говорить, что функция f обгоняет функцию g в точке x_0 , если $f(x_0) = g(x_0)$ и на некотором интервале $(a; x_0)$ выполняется неравенство $f(x) < g(x)$, а на некотором интервале $(x_0; b)$ выполняется неравенство $f(x) > g(x)$.

4. Если $f'(x_0) > g'(x_0)$ (скорость изменения функции f в точке x_0 больше скорости изменения функции g в этой точке), то f обгоняет g в точке x_0 .

Замечания

При изучении математического анализа на повышенном уровне переход к строгому изложению может быть в дальнейшем организован вполне естественным образом. Не трудно доказать, что следующее определение производной является равносильным классическому:

Определение. Число V называется производной функции f в точке x_0 , если:

– при всяком k , большем, чем V , функция $L(x) = k(x - x_0) + f(x_0)$ обгоняет f в точке x_0 ;

– при всяком k , меньшем, чем V , функция $L(x) = k(x - x_0) + f(x_0)$ отстаёт от f в точке x_0 .

Изложение соответствующей теории со всеми необходимыми доказательствами (на основе «геометрического» определения, эквивалентного приведённому выше) имеется в работе авторов [3]. Предлагаемый сейчас подход (без формального определения производной) может быть использован в средней школе и на некоторых технических специальностях университетов. Он не использует представлений о предельном переходе, обеспечивает весьма простые доказательства основных теорем о вычислении производной (конечно, игнорируя вопрос о существовании производной) и переход к исследованию функций. Однако, ещё более важным является создание прочной связи: скорость – производная – касательная – идея линеаризации. Используется не только геометрическая, но и физическая наглядность.

Следуя школьной традиции, линейной будем называть функцию, заданную формулой $L(x) = kx + b$. При этом прямую – график этой функции – будем обозначать L , а для самой функции будем использовать обозначение $L(x)$. Соответственно, будем писать «функция $f(x)$ » вместо «функция f ».

Изучение производной мы начинаем с частного случая, когда производная равна нулю (по понятным причинам мы не можем использовать выражение «о – малое»).

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется пренебрежимо малой в точке x_0 , если в этой точке и значение функции, и её производная (скорость изменения) равны нулю.

Пример 1. Функция $h(x) = (x - x_0)^2$ является пренебрежимо малой в точке x_0 .

Доказательство. Ясно, что $h(x_0) = 0$. Докажем, что $h'(x_0) = 0$. Предположим противное. Пусть $h'(x_0) = k > 0$. Тогда $k > \frac{k}{2}$ и, следовательно, функция $h(x)$ обгоняет в x_0

линейную функцию $L(x) = \frac{k}{2}(x - x_0)$ (скорость которой равна $\frac{k}{2}$ по свойству 1). Это значит, что слева от x_0 , в некотором интервале $(a; x_0)$, будет $h(x) < \frac{k}{2}(x - x_0) < 0$, что невоз-

можно, так как $h(x) = (x - x_0)^2 \geq 0$ при всех x . Если $h'(x_0) = k < 0$, то $k < \frac{k}{2}$ и, следова-

тельно, линейная функция $L(x) = \frac{k}{2}(x - x_0)$ обгоняет $h(x)$ в x_0 . Это значит, что справа от

x_0 , в некотором интервале $(x_0; b)$, будет $h(x) < \frac{k}{2}(x - x_0) < 0$, что невозможно, так как $h(x) \geq 0$ при всех x .

Обобщение. Для любой [дифференцируемой!] функции $f(x)$ такой, что $f(x_0) = 0$, имеем $(f^2)'(x_0) = 0$.

Пример 2. Линейная функция $L(x) = k(x - x_0)$ является пренебрежимо малой в точке x_0 тогда и только тогда, когда $k = 0$. Это сразу следует из свойства 1 производной.

Леммы о пренебрежимо малых

Лемма 1. Произведение пренебрежимо малой на константу является пренебрежимо малой.

Пусть $\alpha'(x_0) = 0$ и C – константа. Предположим противное. Пусть $(C\alpha)'(x_0) \neq 0$. Пусть, например, $(C\alpha)'(x_0) = k > 0$ и $C > 0$. Тогда $k > \frac{k}{2}$ и функция $C\alpha(x)$ обгоняет функцию $L(x) = \frac{k}{2}(x - x_0)$ в момент x_0 (так как скорость $C\alpha(x)$ в этот момент равна k , а скорость $L(x)$ равна $\frac{k}{2}$). Тогда очевидно, что $\alpha(x)$, равная $\frac{C\alpha(x)}{C}$, обгоняет функцию $L_1(x) = \frac{k}{2C}(x - x_0)$ в момент x_0 , что невозможно (поскольку $\alpha'(x_0) = 0 < \frac{k}{2C}$).

Лемма 2. Сумма пренебрежимо малых пренебрежимо мала.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ пренебрежимо малы в момент x_0 . Предположим противное. Пусть $(\alpha + \beta)'(x_0) \neq 0$. Пусть, например, $(\alpha + \beta)'(x_0) = k > 0$. Тогда $L(x) = \frac{k}{4}(x - x_0)$ обгоняет $\alpha(x)$ и обгоняет $\beta(x)$ в момент x_0 (у $L(x)$ скорость равна $\frac{k}{4}$ и $\frac{k}{4} > 0$). Тогда функция $L(x) + L(x) = \frac{k}{2}(x - x_0)$ обгоняет $\alpha(x) + \beta(x)$ в момент x_0 , что невозможно (так как скорость $2L(x)$ равна $\frac{k}{2}$, а скорость $\alpha(x) + \beta(x)$ в момент x_0 равна k и $k > 0$).

Геометрическое определение пренебрежимо малой

Пусть $\alpha(x)$ пренебрежимо мала в точке x_0 . Проведём через точку x_0 оси Ox прямую L_1 с угловым коэффициентом $k_1 > 0$ и прямую L_2 с угловым коэффициентом $k_2 < 0$. Тогда линейная функция с графиком L_1 обгоняет функцию $\alpha(x)$ (напомним, что производная (скорость) $\alpha(x)$ в точке x_0 равна нулю), а линейная функция с графиком L_2 отстаёт от функции $\alpha(x)$. Из этого следует, что на некотором интервале $(a; x_0)$ слева от x_0 и на некотором интервале $(x_0; b)$ справа от x_0 график функции $\alpha(x)$ находится между прямыми L_1 и L_2 (здесь, разумеется, необходим рисунок). Другими словами, вертикальные углы (L_1, x_0, L_2) , образованные прямыми L_1 и L_2 , содержат часть графика функции $\alpha(x)$, соответствующую интервалу $(a; b)$.

Не трудно доказать (от противного) и обратное: если для любой пары вертикальных углов (L_1, x_0, L_2) , содержащих ось Ox , найдётся интервал $(a; b)$, на котором вертикальные углы (L_1, x_0, L_2) содержат график функции $\alpha(x)$, то функция $\alpha(x)$ является пренебрежимо малой в точке x_0 .

Производная и касательная: идея линеаризации

Рассмотрим прямолинейное движение двух тел. Первое тело движется по закону $S = f(x)$ (здесь время обозначено буквой x), а второе движется равномерно по закону $S = K(x)$. Предположим, что в момент x_0 второе тело поравнялось с первым. Тогда закон движения второго тела имеет вид $K(x) = k(x - x_0) + f(x_0)$. Если в момент x_0 и скорость второго тела оказалась равна скорости первого, то $k = f'(x_0)$. Естественно ожидать, что разность $f(x) - K(x)$ окажется пренебрежимо малой в момент x_0 . Докажем это. Обозначим $\alpha(x) = f(x) - K(x)$, заметим, что $\alpha(x_0) = 0$, и предположим, что $\alpha'(x_0) \neq 0$. Пусть, например, $\alpha'(x_0) > 0$. Тогда $\alpha'(x_0) > \frac{\alpha'(x_0)}{2}$ и функция $\alpha(x)$ обгоняет функцию

$L(x) = \frac{\alpha'(x_0)}{2}(x - x_0)$ в момент x_0 . Тогда $\alpha(x) + K(x)$ (равная $f(x)$) обгоняет функцию

$$L(x) + K(x) = \frac{\alpha'(x_0)}{2}(x - x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \left[\frac{\alpha'(x_0)}{2} + f'(x_0) \right](x - x_0) + f(x_0),$$

что невозможно, так как скорость этой функции равна $\frac{\alpha'(x_0)}{2} + f'(x_0)$ и эта скорость больше, чем $f'(x_0)$ – скорость функции $f(x)$ в момент x_0 .

Определение. Прямая K называется касательной к графику функции f в точке $(x_0; f(x_0))$, если разность между функцией $f(x)$ и линейной функцией с графиком K является пренебрежимо малой в точке x_0 .

Выше было доказано, что график функции $K(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (то есть график равномерного движения со скоростью $f'(x_0)$) является касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$. Легко доказать и обратное (как всегда «от противного»): если прямая K является касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, то угловой коэффициент этой прямой равен $f'(x_0)$.

Теоремы о вычислении производной

Теорема 1. Константу можно выносить за знак производной.

Если $u'(x_0) = k$, то $u(x) = k(x - x_0) + u(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ пренебрежимо мала в x_0 . Тогда $Cu(x) = Ck(x - x_0) + Cu(x_0) + C\alpha(x)$. Так как $C\alpha(x)$ пренебрежимо мала по лемме 1, то $(Cu)'(x_0) = Ck = Cu'(x_0)$.

Теорема 2. Производная суммы равна сумме производных.

Если $u'(x_0) = k$ и $v'(x_0) = l$, то $u(x) = k(x - x_0) + u(x_0) + \alpha(x)$ и $v(x) = l(x - x_0) + v(x_0) + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ пренебрежимо малы в x_0 . Тогда $u(x) + v(x) = (k + l)(x - x_0) + (u(x_0) + v(x_0)) + \alpha(x) + \beta(x)$. Применяя лемму 2, получаем: $(u + v)'(x_0) = k + l = u'(x_0) + v'(x_0)$.

Теорема 3. Производная произведения двух функций вычисляется по формуле $(uv)' = u'v + v'u$.

Сначала докажем формулу $(h^2)'(x_0) = 2h(x_0) \cdot h'(x_0)$. Для этого обозначим $f(x) = h(x) - h(x_0)$. Так как $f(x_0) = 0$, то $(f^2)'(x_0) = 0$ (см. пример 1, обобщение). Учитывая, что $h^2(x) = (f(x) + h(x_0))^2 = f^2(x) + 2h(x_0)f(x) + h^2(x_0)$ и применяя теоремы 1 и 2, получаем: $(h^2)'(x_0) = (f^2)'(x_0) + 2h(x_0)f'(x_0) + 0 = 2h(x_0)h'(x_0)$.

Учитывая, что $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ и $uv = \frac{1}{2}((u+v)^2 - u^2 - v^2)$, получаем:

$$(uv)' = \frac{1}{2}[2(u+v)(u+v)' - 2uu' - 2vv'] = uu' + uv' + vu' + vv' - uu' - vv' = uv' + vu'.$$

Теорема 4. Производная частного двух функций вычисляется по формуле $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ (в тех точках, где функция $v(x)$ не равна нулю).

Так как $\frac{u}{v} \cdot v = u$, то $\left(\frac{u}{v} \cdot v\right)' = u'$ и, следовательно, $\left(\frac{u}{v}\right)' \cdot v + \frac{u}{v} \cdot v' = u'$. Отсюда

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{1}{v}(u' - \frac{u}{v} \cdot v') = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Заключительные замечания

При начальном изучении математического анализа не предполагается доказательство формулы производной сложной функции (кроме очевидного случая, когда «внешняя» функция линейна). Однако, доказательство в общем случае легко получить, опираясь на утверждение, что пренебрежимо малая от любой [дифференцируемой] функции является пренебрежимо малой.

Доказательство необходимого условия экстремума не вызывает ни малейших затруднений. В самом деле, предположение о том, что $f'(x_0) \neq 0$, сразу приводит к противоречию, так как при $k = \frac{f'(x_0)}{2}$ линейная функция $L(x) = k(x - x_0) + f(x_0)$ отстаёт от $f(x)$ в момент x_0 , если $f'(x_0) > 0$, и обгоняет $f(x)$ в момент x_0 , если $f'(x_0) < 0$. В обоих случаях с одной из сторон от точки x_0 функция $f(x)$ оказывается больше, чем $f(x_0)$ (противоречие для случая максимума).

При доказательстве теорем об исследовании функций обычно существенную роль играет теорема Лагранжа. Нам представляется целесообразным на начальном уровне отказаться даже от формулировки этой теоремы существования, а просто принять без доказательства ещё одно утверждение: «Если производная (скорость) на некотором интервале положительна, то на этом интервале функция возрастает (пройденный путь увеличивается)».

Несомненный интерес представляет и то, что при введении производной как скорости довольно просто получить оценку погрешности, возникающей при замене функции на её касательную (а не только локальную линеаризацию).

Литература

1. Гаврилюк, А.В. Наглядные определения непрерывности и дифференцируемости / А.В. Гаврилюк, А.А. Гаврилюк // Международная научная конференция «Х Белорусская математическая конференция». Ч. 1. – Минск, 2008. – С. 124–125.

2. Гаврилюк, А.В. Понятия непрерывности и дифференцируемости в курсе математического анализа: практическое пособие для студентов математических специальностей / А.В. Гаврилюк, А.А. Гаврилюк // Мин-во обр. РБ, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2009. – 62 с.

3. Гаврилюк, А.В. Проблема определения производной без использования понятия предела / А.В. Гаврилюк, А.А. Гаврилюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4(5). – С. 24–28.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 03.09.12

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины