

УДК 523.035

АСТРОНОМИЯ

Член-корреспондент АН СССР В. В. СОБОЛЕВ, В. М. ЛОСКУТОВ

ДИФфуЗНОЕ ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРОЙ

При решении проблемы отражения света атмосферой обычно допускается однородность атмосферы (см., например, (1, 2)): Лишь в небольшом числе работ ((3-10) и некоторые другие) атмосфера считается неоднородной. В настоящей заметке при рассмотрении указанной задачи предполагается, что в атмосфере происходит изотропное рассеяние света, причем альбедо однократного рассеяния λ зависит от оптической глубины τ .

Пусть атмосфера освещена параллельными лучами, падающими под углом $\arccos \xi$ к нормали и создающими освещенность πS перпендикулярной к ним площадки. Тогда функция источников $B(\tau, \xi)$ определяется интегральным уравнением

$$B(\tau, \xi) = \frac{\lambda(\tau)}{2} \int_0^\infty B(t, \xi) E_1(|\tau - t|) dt + \frac{\lambda(\tau)}{4} S e^{-\tau/\xi}. \quad (1)$$

Если эта функция известна, то коэффициент отражения $\rho(\eta, \xi)$ находится по формуле

$$\rho(\eta, \xi) = \frac{1}{S} \int_0^\infty B(\tau, \xi) e^{-\tau/\eta} \frac{d\tau}{\eta \xi}, \quad (2)$$

где η — косинус угла отражения.

В работах одного из авторов (3) и Беллмана и Калаба (4) показано, что коэффициент отражения выражается через вспомогательную функцию $\varphi(\eta, \tau)$ при помощи формулы

$$\rho(\eta, \xi) = \frac{1}{4} \int_0^\infty \lambda(\tau) \varphi(\eta, \tau) \varphi(\xi, \tau) e^{-\tau(1/\eta + 1/\xi)} \frac{d\tau}{\eta \xi}, \quad (3)$$

а функция $\varphi(\eta, \tau)$ может быть найдена из уравнения

$$\varphi(\eta, \tau) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} \int_\tau^\infty \lambda(t) \varphi(\eta, t) \varphi(\xi, t) e^{-(t-\tau)(1/\eta + 1/\xi)} dt. \quad (4)$$

Существенно то, что знание функции $\varphi(\eta, \tau)$ дает возможность определить коэффициент отражения не только для данной атмосферы, но и для любой другой атмосферы, которая получается из данной отбрасыванием верхнего слоя произвольной оптической толщины τ_0 . Выражение для коэффициента отражения такой атмосферы получается из формулы (3), если в качестве нижнего предела интегрирования вместо 0 взять τ_0 и величину τ в экспоненте заменить на $\tau - \tau_0$.

Уравнение (4) легко может быть решено численными методами при любой зависимости λ от τ . Однако в некоторых случаях можно получить и аналитические решения этого уравнения.

Мы сейчас допустим, что

$$\lambda(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e^{-k m \tau}, \quad (5)$$

где λ_k и m — некоторые параметры.

В данном случае, как следует из (4), функция $\varphi(\eta, \tau)$ представляется в виде

$$\varphi(\eta, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\eta) e^{-km\tau}, \quad (6)$$

где функции $\varphi_k(\eta)$ при $k \geq 1$ определяются уравнениями

$$\varphi_k(\eta) = \frac{\eta}{2} \int_0^1 \frac{d\xi}{\eta + \xi + km\eta\xi} \sum_{i=0}^k \lambda_i \sum_{j=0}^{k-i} \varphi_j(\eta) \varphi_{k-i-j}(\xi), \quad (7)$$

а функция $\varphi_0(\eta)$ — уравнением

$$\varphi_0(\eta) = 1 + \frac{\lambda_0}{2} \eta \varphi_0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_0(\xi)}{\eta + \xi} d\xi. \quad (8)$$

полученным ранее В. А. Амбарцумяном ⁽¹⁾ для случая однородной атмосферы (при $\lambda_0 = 0$).

Для коэффициента отражения мы имеем

$$\rho(\eta, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(\eta, \xi), \quad (9)$$

где

$$\rho_k(\eta, \xi) = \frac{1}{4(\eta + \xi + km\eta\xi)} \sum_{i=0}^k \lambda_i \sum_{j=0}^{k-i} \varphi_j(\eta) \varphi_{k-i-j}(\xi). \quad (10)$$

Таким образом, для определения коэффициента отражения надо знать функции $\varphi_k(\eta)$, которые могут быть найдены последовательно одна за другой из уравнений (7). Подчеркнем, что в случае, когда $\lambda_0 = 0$, задача сильно упрощается, так как уравнения (7) переходят в рекуррентные формулы для последовательного определения функций $\varphi_k(\eta)$ при $\varphi_0(\eta) = 1$.

Непосредственно через функции $\varphi_k(\eta)$ можно выразить и альбедо атмосферы $A(\xi)$, представляющее собой отношение энергии, отраженной атмосферой, к энергии, падающей на нее. Альбедо атмосферы определяется формулой

$$A(\xi) = 2 \int_0^1 \rho(\eta, \xi) \eta d\eta, \quad (11)$$

которую можно переписать также в виде

$$A(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\xi), \quad (12)$$

где

$$A_k(\xi) = 2 \int_0^1 \rho_k(\eta, \xi) \eta d\eta. \quad (13)$$

Пользуясь соотношениями (7) и (10), получаем

$$A_k(\xi) = \frac{1}{1+km\xi} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=0}^k \lambda_i \sum_{j=0}^{k-i} \gamma_j \varphi_{k-i-j}(\xi) - \varphi_k(\xi) \right], \quad (14)$$

где обозначено

$$\gamma_j = \int_0^1 \varphi_j(\eta) d\eta. \quad (15)$$

Рассмотрим в качестве примера случай, когда $\lambda(\tau) = \lambda_1 e^{-m\tau}$. В этом случае функции $\varphi_k(\eta)$, согласно (7), находятся по рекуррентной формуле

$$\varphi_k(\eta) = \frac{\lambda_1}{2} \eta \int_0^1 \frac{d\xi}{\eta + \xi + km\eta\xi} \sum_{j=0}^{k-1} \varphi_j(\eta) \varphi_{k-1-j}(\xi) \quad (16)$$

при $\varphi_0(\eta) = 1$, а коэффициент отражения дается формулой (9), где

$$\rho_k(\eta, \xi) = \frac{\lambda_1}{4(\eta + \xi + km\eta\xi)} \sum_{j=0}^{k-1} \varphi_j(\eta) \varphi_{k-1-j}(\xi). \quad (17)$$

Очевидно, что при заданном m достаточно найти функции $\varphi_k(\eta)$ при $\lambda_1 = 1$, так как имеют место соотношения

$$\varphi_k(\eta, \lambda_1) = \lambda_1^k \varphi_k(\eta, 1); \quad (18)$$

$$\rho_k(\eta, \xi, \lambda_1) = \lambda_1^k \rho_k(\eta, \xi, 1). \quad (19)$$

Значения функций $\varphi_k(\eta)$, вычисленные при $m=1$ и $\lambda_1=1$, приведены в табл. 1.

Таблица 1

η	$\varphi_k(\eta)$					
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,113	0,029	0,010	0,004	0,002	0,001
0,2	0,132	0,049	0,018	0,007	0,003	0,001
0,3	0,193	0,064	0,024	0,010	0,004	0,002
0,4	0,215	0,074	0,029	0,012	0,005	0,002
0,5	0,231	0,083	0,032	0,013	0,006	0,002
0,6	0,244	0,089	0,036	0,015	0,006	0,003
0,7	0,254	0,095	0,038	0,016	0,007	0,003
0,8	0,262	0,099	0,040	0,017	0,007	0,003
0,9	0,269	0,103	0,042	0,017	0,007	0,003
1,0	0,275	0,106	0,043	0,018	0,008	0,003

Мы видим, что функции $\varphi_k(\eta)$ довольно быстро убывают с ростом k , так что большого числа этих функций не требуется. Однако чем меньше m , тем убывание происходит медленнее. Наиболее медленно убывают функции $\varphi_k(\eta)$ при $m=0$, но в этом случае функция $\varphi(\eta, \tau)$ превращается в известную функцию $\varphi(\eta)$ для однородной атмосферы.

В табл. 2 содержатся значения величины $\rho(\eta, 1)$, т. е. коэффициента отражения при нормальном падении внешнего излучения, для $\lambda_1=1$ и различных m .

Кроме рассмотренного выше примера экспоненциального убывания величины λ с ростом τ , для практических применений представляет интерес также случай, когда λ дается формулой

$$\lambda(\tau) = \lambda_0 + \lambda_1 e^{-m\tau}. \quad (20)$$

Если $\lambda_1 < 0$, то величина $\lambda(\tau)$ с ростом τ возрастает. Однако этот случай несколько сложнее предыдущего, так как уравнения (7) при $\lambda_0 \neq 0$ не превращаются в рекуррентные формулы.

η	Коэффициент отражения $\rho(\eta, 1)$							
	$m=0$	$m=0,1$	$m=0,2$	$m=0,5$	$m=1$	$m=2$	$m=5$	$m=10$
0	0,727	0,483	0,447	0,398	0,364	0,333	0,300	0,282
0,1	0,824	0,514	0,463	0,391	0,334	0,274	0,194	0,136
0,2	0,879	0,513	0,452	0,364	0,294	0,225	0,141	0,089
0,3	0,918	0,503	0,434	0,336	0,261	0,190	0,111	0,066
0,4	0,950	0,489	0,414	0,310	0,234	0,165	0,091	0,053
0,5	0,975	0,473	0,394	0,288	0,212	0,145	0,077	0,044
0,6	0,997	0,457	0,375	0,268	0,193	0,129	0,067	0,038
0,7	1,015	0,440	0,357	0,250	0,177	0,117	0,059	0,033
0,8	1,031	0,424	0,340	0,234	0,164	0,106	0,053	0,029
0,9	1,045	0,409	0,325	0,220	0,153	0,098	0,048	0,026
1,0	1,057	0,394	0,310	0,208	0,142	0,090	0,044	0,024

Естественным обобщением формулы (5) является представление величины $\lambda(\tau)$ в виде интеграла

$$\lambda(\tau) = \int_0^{\infty} L(x) e^{-x\tau} dx. \quad (21)$$

Функцию $\varphi(\eta, \tau)$, в согласии с (6), представим в виде

$$\varphi(\eta, \tau) = 1 + \int_0^{\infty} \alpha(\eta, x) e^{-x\tau} dx, \quad (22)$$

где $\alpha(\eta, x)$ — неизвестная функция.

Подстановка (21) и (22) в (4) приводит к следующему уравнению для определения функции $\alpha(\eta, x)$:

$$\alpha(\eta, x) = \frac{\eta}{2} \int_0^1 \frac{d\xi}{\eta + \xi + x\eta\xi} \left\{ L(x) + \int_0^x L(y) dy \left[\alpha(\eta, x-y) + \alpha(\xi, x-y) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^{x-y} \alpha(\eta, z) \alpha(\xi, x-y-z) dz \right] \right\}. \quad (23)$$

Решение уравнения (23) в некоторых случаях может оказаться более удобным, чем решение уравнения (4).

В заключение заметим, что рассмотренная в этой заметке функция $\varphi(\eta, \tau)$ может быть применена не только к решению задачи о диффузном отражении света атмосферой. Как уже указывалось ранее (³), через эту функцию выражается также интенсивность излучения, выходящего из атмосферы, при источниках энергии, находящихся внутри нее (т. е. при различных других свободных членах уравнения (1)).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
17 VI 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Амбарцумян, Паучные тр., т. 1, Ереван, 1960. ² В. В. Соболев, Рассеяние света в атмосферах планет, «Наука», 1972. ³ В. В. Соболев, ДАН, т. 111, 1000 (1956). ⁴ R. E. Bellman, R. E. Kalaba, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 42, 629 (1956). ⁵ S. Ueno, Astrophys. J., v. 132, 729 (1960). ⁶ I. W. Busbridge, ibid., v. 133, 198 (1961). ⁷ Э. Г. Яновский, Астрон. журн., т. 38, 912 (1961). ⁸ J. W. Chamberlain, M. B. McElroy, Astrophys. J., v. 144, 1148 (1966). ⁹ K. D. Abhyankar, A. L. Fymat, ibid., v. 158, 315, 325 (1969); v. 159, 1009, 1019 (1970). ¹⁰ B. J. Martin, SIAM J. Appl. Math., v. 20, 703 (1971).