

Е. И. МОИСЕЕВ

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 12 XI 1975)

1. Пусть область T — открытый полукруг на плоскости, радиус которого равен 1, а диаметр представляет отрезок $[-1, 1]$ оси Ox . Рассмотрим в области T задачу на собственные функции и собственные значения:

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0 \quad \text{в } T, \\ u|_{|z|=1} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{-1 < z < 1} &= 0, \quad u \in C^{(0)}(\bar{T}) \cap C^{(1)}(\partial T_2 \cup T) \cap C^{(2)}(T), \quad \partial T_1 = \partial T \setminus \partial T_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $z = x + iy$, а ∂T_2 — отрезок оси Ox $(-1, 1)$. Нетрудно проверить, что функцией Грина для уравнения Лапласа с краевыми условиями задачи (1) является функция $G(W(z_1), W(z_2))$ вида

$$\begin{aligned} G(W_1, W_2) = & -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{W_1 - W_2}{W_1 - \bar{W}_2} \right| + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{W_1 + W_2}{W_1 + \bar{W}_2} \right| + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\alpha_1 - \beta_2}{\alpha_2 + \beta_1} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\alpha_1 - \beta_2}{\beta_1 - \alpha_2} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\alpha_1 + \beta_2}{\alpha_2 - \beta_1} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\alpha_1 + \beta_2}{\beta_1 + \alpha_2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $W(z) = \sqrt{i(1-z)/(1+z)}$, причем $\arg W$ удовлетворяет неравенству $\pi/4 \geq \arg W \geq 0$ и $W_j = \alpha_j + i\beta_j$, где $j = 1, 2$.

Таким образом, вместо задачи (1) можно рассмотреть соответствующее интегральное уравнение

$$u(z_1) = -\lambda \int_T G(W(z_1), W(z_2)) u(z_2) ds_{z_2} = -\lambda Ku. \quad (3)$$

Из вида ядра (2) следует, что оператор K является оператором Гильберта — Шмидта. Выясним теперь, где на комплексной плоскости располагаются значения формы (Ku, u) . Для этого достаточно рассмотреть значения формы (Ku, u) , когда u финитна в T .

Пусть $v(z) = Ku$, где $u \in C_0^\infty(T)$. Легко проверить, что $v(z)$ непрерывна в $\bar{T}$ за исключением точки $z = -1$. Но и в точке $z = -1$ из конкретного вида ядра $G(W_1, W_2)$ следует, что $v(z)$ непрерывна. Кроме того очевидно, что $v(z)$ непрерывно дифференцируема по крайней мере один раз вплоть до границы, исключая точки $z = 1$ и $z = -1$. Окружим точки $z = 1$ и $z = -1$ концентрическими окружностями с радиусами ε и 2ε . Из результатов работы ⁽²⁾ следует, что между двумя концентрическими окружностями в области T можно построить такие кусочно-гладкие кривые s_ε^{-1} и s_ε^{-1} (соответственно для $z = 1$ и $z = -1$), разделяющие эти окружности, что выполняется неравенство

$$\int_{s_\varepsilon^j} \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| ds \leq C \operatorname{osc} v, \quad j = 1, -1,$$

где $\operatorname{osc} v$ вычисляется по концентрическому слою, лежащему в области T .

Учитывая, что $v \in C^{(0)}(T)$, получим, что

$$\int_{s_{\varepsilon}^j} \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| ds \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4)$$

Обозначим область, полученную после вырезания из области T поверхностями s_{ε}^1 и s_{ε}^{-1} точек $z=1$ и $z=-1$, через T_{ε} . Применим в T_{ε} формулу Грина для v :

$$\int_{\partial T_{\varepsilon}} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} ds = \int_{T_{\varepsilon}} |\nabla v|^2 ds_z + \int_{T_{\varepsilon}} v \Delta \bar{v} ds_z \quad (5)$$

или

$$\int_{s_{\varepsilon}^{-1}} v \frac{\partial v}{\partial n} ds + \int_{s_{\varepsilon}^1} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} ds - \int_{-1+\delta_1(\varepsilon)}^{1-\delta_2(\varepsilon)} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dx = \int_{T_{\varepsilon}} |\nabla v|^2 ds_z + \int_{T_{\varepsilon}} Ku \cdot \bar{u} ds_z.$$

Учитывая, что $\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$, и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в выражении (5), получим

$$\int_T Ku \cdot \bar{u} ds = - \int_T |\nabla v|^2 ds + \int_{-1}^1 v \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dx,$$

и

$$\operatorname{Re}(Ku, u) = - \int_T |\nabla v|^2 ds, \quad \operatorname{Im}(Ku, u) = -i \int_{-1}^1 v \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dx.$$

Докажем теперь, что

$$|\operatorname{Im}(Ku, u)| < |\operatorname{Re}(Ku, u)|. \quad (6)$$

Отобразим конформно область T на окружность единичного радиуса с помощью некоторой функции $\omega = f(z)$ и обозначим круг единичного радиуса через D . Тогда очевидно, что

$$- \int_T |\nabla_z v|^2 ds_z = - \int_D |\nabla_{\omega} v|^2 ds_{\omega},$$

и

$$-i \int_{-1}^1 v \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dx = -i \int_0^{2\pi} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} d\varphi,$$

где r и φ — полярные координаты в области D .

Достаточно проверить неравенство (6) для гармонической функции ψ , которая на границе ∂D принимает значение, равное v , так как $\int_D |\nabla_{\omega} \psi|^2 ds_{\omega} < \int_D |\nabla_{\omega} v|^2 ds_{\omega}$ (свойство минимума квадратичного функционала)

и $\int_0^{2\pi} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varphi} d\varphi$. Для гармонической функции $\psi = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \times (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$ справедливы тождества

$$\int_D |\nabla \psi|^2 ds_{\omega} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) n,$$

$$\int_0^{2\pi} \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varphi} d\varphi = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \bar{b}_n - \bar{a}_n b_n) n = 2\pi i \cdot \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_n n.$$

Из неравенства Коши — Буниковского следует неравенство (6) для гармонической функции:

$$\left| \int_0^{2\pi} \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \varphi} d\varphi \right| \leq \int_D |\nabla \psi|^2 ds.$$

Из неравенства (6) следует, что значения (Ku, u) лежат в угле $3\pi/4 < \varphi < 5\pi/4$ на комплексной плоскости. Из теоремы Келдыша — Лидского ⁽¹⁾ следует, что система собственных и присоединенных функций оператора K полна в $L_2(T)$. Итак, доказано, что задача (1) имеет полную систему корневых функций и спектр задачи (1) расположен в угле $-\pi/4 < \varphi < \pi/4$ (эквивалентность задачи (1) задаче (3) доказывается обычным способом, используя конкретный вид ядра G).

2. Если граница области T состоит из отрезка $[-1, 1]$ действительной оси и произвольной ляпуновской кривой, соединяющей точки $(-1, 0)$ и $(1, 0)$, то интегральное уравнение, соответствующее задаче (1) для новой области T , имеет вид

$$u(\omega_1) = -\lambda \int_T G(W(f(\omega_1)), W(f(\omega_2))) u(\omega_2) ds_{\omega_2},$$

где функция $z=f(\omega)$ конформно отображает область T на полукруг. Далее рассуждения совпадают с п. 1 и получается, что система корневых векторов для области T полна и спектр лежит в угле $-\pi/4 < \varphi < \pi/4$.

3. Пусть область T такая же, как и в п. 2, но краевая задача имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0 \quad \text{в } T, \\ u|_{\partial T_1} &= 0 \quad \partial T_2 = (-1, 1), \quad \partial T_1 = \partial T \setminus \partial T_2, \\ \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{-1 < x < 1} &= 0, \quad u \in C^{(0)}(\bar{T}) \cap C^{(1)}(\partial T_2 \cup T) \cap C^{(2)}(T). \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда система корневых векторов задачи (7) полна в $L_2(T)$, а спектр лежит в угле $-\arctg|\alpha| < \varphi < \arctg|\alpha|$. Доказательство этого результата аналогично доказательству полноты в пп. 1, 2. Отметим только, что в случае $\alpha = \operatorname{tg}(2\pi p/N)$, где p и N — целые числа, функцию Грина можно выписать без квадратур в виде, аналогичном (2). Для других α функцию G можно выписать в виде некоторого интеграла.

Если α — функция от x , то задача (7) также имеет полную систему корневых векторов, а ее спектр, за исключением конечного числа собственных чисел, лежит в угле $-\varepsilon - \arctg \alpha_0 < \varphi < \varepsilon + \arctg \alpha_0$, где $\alpha_0 = \max_{-1 \leq x \leq 1} |\alpha(x)|$, $\varepsilon > 0$ — как угодно малое число.

4. Аналогичные результаты справедливы и для задачи с косою производной:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{в } T, \quad \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{\partial T} = 0, \quad (8)$$

где T — некоторая область на плоскости с границей Ляпунова ∂T , а $\sqrt{1 - (1, n)^2} \cdot (1, n)^{-1} = \alpha(x) \neq 0$. В этом случае система корневых векторов задачи (8) полна в $L_2(T)$, а ее спектр, за исключением конечного числа собственных чисел, лежит в угле $-\varepsilon - \arctg \alpha_0 < \varphi < \varepsilon + \arctg \alpha_0$, где $\alpha_0 = \max_{x \in \partial T} |\alpha(x)|$, а $\varepsilon > 0$ — как угодно малое число.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. В. Бицадзе, обратившему внимание автора на задачи такого рода, и В. А. Ильину за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

¹ М. В. Келдыш, В. Б. Лидский, Тр. Всесоюз. матем. съезда, т. 1 (1963). ² Е. М. Ландис, УМН, т. 18, в. 1 (1963).