

УДК 518.731.343.1

МАТЕМАТИКА

А. Г. ЧЕНЦОВ

О СТРУКТУРЕ ОДНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ СБЛИЖЕНИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 22 V 1975)

1. Статья примыкает к исследованиям (¹⁻⁶). Рассматривается система

$$dx/dt=f(t, x, u, v), \quad (1)$$

где $t \in R^1$, $x \in R^n$, $u \in P$, $v \in Q$, причем

$$P \subseteq \text{comp}(R^p), \quad Q \subseteq \text{comp}(R^q); \quad (2)$$

здесь f непрерывна по совокупности и для всяких $[t_1, t_2] \subset R^1$ и $K \subseteq \text{comp}(R^n)$ удовлетворяет на $[t_1, t_2] \times K \times P \times Q$ условию Липшица по аргументу x с некоторой константой Липшица $\Lambda(K, t_1, t_2)$. Кроме того предполагается выполненным условие равномерной продолжимости решений (^{1, 2}).

Для всякого множества E обозначим 2^E класс всех подмножеств E . Контрстратегией I игрока назовем всякую функцию $U_v: [t_0, \theta] \times \times R^n \rightarrow 2^{F_{QP}}$ (F_{QP} — множество всех борелевских функций $Q \rightarrow P$) с непустыми на $[t_0, \theta] \times R^n$ значениями $U_v(t, x)$. Стратегией I игрока назовем всякую функцию $U: [t_0, \theta] \times R^n \rightarrow 2^P$ с непустыми на $[t_0, \theta] \times R^n$ значениями $U(t, x)$. Обозначим также $\mathcal{X}(\cdot, t_*, x_*, U_v)$ ($\mathcal{X}(\cdot, t_*, x_*, U)$) множества всех движений, порожденных контрстратегией U_v (стратегией U) из начальной позиции $(t_*, x_*) \in [t_0, \theta] \times R^n$ и определенных как равномерные пределы аппроксимационных движений $x_\Delta[\cdot]$, порожденных указанными процедурами из позиции (t_*, x_*) , при условии, что шаг разбиения Δ отрезка $[t_*, \theta]$ стремится к нулю (см. (¹)).

Задача сближения. Найти контрстратегию U_v^0 , для которой при фиксированных $t_0 \in R^1$, $x_0 \in R^n$ и $\theta \in (t_0, \infty)$

$$\sup_{\mathcal{X}(\cdot, t_0, x_0, U_v^0)} f_0(x[\theta]) = \min_{(U_v) \in \mathcal{X}(\cdot, t_0, x_0, U_v)} \sup f_0(x[\theta]) = c_0(t_0, x_0); \quad (3)$$

здесь f_0 — заданная непрерывная на R^n целевая функция. При условии седловой точки в маленькой игре (¹) задачу сближения требуется решить в классе стратегий U (в соотношении (3) при этом минимум вычисляется на множестве $\{U\}$ всех стратегий I игрока, а $\sup$ — на множествах $\mathcal{X}(\cdot, t_0, x_0, U)$). Решение задачи сближения может быть определено посредством экстремального прицеливания к максимальному u -стабильному мосту (^{1, 2})

$$W_c = \{(t, x): (t, x) \in [t_0, \theta] \times R^n, c_0(t, x) \leq c\} \quad (4)$$

при выборе $c = c_0(t_0, x_0)$. Заметим, что в регулярных случаях (^{1, 6}) решение задачи сближения находится в эффективной форме с помощью программных конструкций. Основными элементами используемой ниже программной конструкции (см. (^{5, 6})) являются классы $\{\mathcal{H}_\lambda, [t_1, t_2]\}$, $\{\mathcal{E}_\lambda, [t_1, t_2]\}$ допустимых программных управлений η и программных управлений v II игрока, а также семейство программ $\{\Pi(v), [t_1, t_2]\}$ на отрезке $[t_1, t_2] \subset [t_0, \theta]$. Рассмотрим некоторые способы нахождения функции $c_0: [t_0, \theta] \times R^n \rightarrow R^1$, определяемой как минимакс $f_0(x[\theta])$ на множествах $\{U_v\}$ и $\mathcal{X}(\cdot, t_*, x_*, U_v)$ (3), и множеств W_c .

2. Определим оператор

$$\Gamma: C([t_0, \theta] \times R^n) \rightarrow C([t_0, \theta] \times R^n)$$

соотношением: для любой функции g , непрерывной на $[t_0, \vartheta] \times R^n$,

$$\Gamma(g)(t_*, x_*) = \max_{[t_*, \vartheta]} \max_{\{\mathcal{E}_\lambda, [t_*, \vartheta]\}} \min_{\mathcal{G}(t, t_*, x_*, v)} g(t, x) \quad (5)$$

при всяком выборе $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times R^n$; здесь $C([t_0, \vartheta] \times R^n)$ — множество всех непрерывных функций $[t_0, \vartheta] \times R^n \rightarrow R^1$.

Пусть, кроме того, функция $\varepsilon^0 \in C([t_0, \vartheta] \times R^n)$ определена условием (6)

$$\varepsilon^0(t_*, x_*) = \max_{\{\mathcal{E}_\lambda, [t_*, \vartheta]\}} \min_{\mathcal{G}(v, t_*, x_*, v)} f_0(x),$$

последовательность $(\varepsilon^{(k)})_{k \in \mathcal{N}_0}$, $\mathcal{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$, определена условиями: $\varepsilon^{(0)} = \varepsilon^0$, при $k \geq 1$

$$\varepsilon^{(k)} = \Gamma(\varepsilon^{(k-1)}) = \Gamma^k(\varepsilon^0), \quad (6)$$

и множества $\mathcal{W}_c^{(k)}$, $\mathcal{W}_c$, $k \in \mathcal{N}_0$, $c \in R^1$, определяются условиями

$$\mathcal{W}_c^{(k)} = \{(t, x) : (t, x) \in [t_0, \vartheta] \times R^n, \varepsilon^{(k)}(t, x) \leq c\}, \quad \mathcal{W}_c = \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} \mathcal{W}_c^{(k)}; \quad (7)$$

здесь $\mathcal{G}(\vartheta, t_*, x_*, v)$ — область достижимости для программы $\{\Pi(v), [t_*, \vartheta]\}$ (5).

Теорема 2.1. Последовательность $(\varepsilon^{(k)})_{k \in \mathcal{N}_0}$ монотонно на $[t_0, \vartheta] \times R^n$ сходится к функции c_0 : для всякой позиции $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times R^n$

$$c_0(t_*, x_*) = \lim_k \uparrow \varepsilon^{(k)}(t_*, x_*),$$

множество $\mathcal{W}_c$ при каждом $c \in R^1$ совпадает с максимальным π -стабильным множеством W_c , определяемым соотношением (4).

Теорема 2.2. Функция c_0 , определяемая соотношением (3), непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times R^n$ и является минимальным (в смысле отношения порядка в $C([t_0, \vartheta] \times R^n)$) решением уравнения $\Gamma(g) = g$ с краевым условием $g(\vartheta, \cdot) = f_0$.

3. Определим оператор $A_0: 2^{[t_0, \vartheta] \times R^n} \rightarrow 2^{[t_0, \vartheta] \times R^n}$ условием: для каждого множества E множество $A_0(E)$ есть множество всех позиций $(t_*, x_*) \in E$, для каждой из которых при любом выборе $t^* \in [t_*, \vartheta]$ и $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_*, \vartheta]\}$

$$\mathcal{G}(t^*, t_*, x_*, v) \cap E(t^*) \neq \emptyset, \quad (8)$$

где $E(t^*) = \{x: x \in R^n, (t^*, x) \in E\}$. Оператор $A_\infty: 2^{[t_0, \vartheta] \times R^n} \rightarrow 2^{[t_0, \vartheta] \times R^n}$ определим условием: для каждого множества E

$$A_\infty(E) = \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} A_0^k(E), \quad (9)$$

где A_0^m — m -я степень оператора A_0 , ($m \in \mathcal{N}_0$). Пусть для всякого $c \in R^1$

$$\mathcal{W}_c^0 = \{(t, x) : (t, x) \in [t_0, \vartheta] \times R^n, \varepsilon^0(t, x) \leq c\}. \quad (10)$$

Теорема 3.1. Для всякого $c \in R^1$ множества $\mathcal{W}_c$ и $A_\infty(\mathcal{W}_c^0)$ совпадают, $A_0^k(\mathcal{W}_c^0) = \mathcal{W}_c^{(k)}$ при $k \in \mathcal{N}_0$.

Пусть система (1) собственнo линейна:

$$f(t, x, u, v) = A(t)x + f(t, u, v) \quad (11)$$

при всех (t, x, u, v) , и для всякого множества $E \subset [t_0, \vartheta] \times R^n$, имеющего выпуклые сечения $E(t) = \{x: x \in R^n, (t, x) \in E\}$ на $[t_0, \vartheta]$, в каждый момент $t \in [t_0, \vartheta]$ $w_t^E: S_n(0, 1) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ — опорная функция $E(t)$; здесь $S_n(0, 1)$ — замкнутый евклидов шар в R^n . Тогда справедлива

Теорема 3.2. Для всякого замкнутого множества $E \subset [t_0, \vartheta] \times R^n$, имеющего выпуклые сечения $E(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, $A_0(E)$ есть множество всех

позиций (t_*, x_*) , для которых при любом $t^* \in [t_*, \vartheta]$ для всякого $l \in S_n(0, 1)$

$$l'X(t^*, t_*)x_* + \int_{[t^*, t^*]} \max_Q \min_P [l'X(t^*, t)f(t, u, v)\lambda(dt) \leq w_{t^*}^E(l). \quad (12)$$

Примечание. Если $E(t) = \phi$, то по определению $w_{t^*}^E(l) = -\infty$ при всех $l \in S_n(0, 1)$; $X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений для системы (1), (11).

4. На простых примерах видно, что в общем случае значения $c_0(t, x)$ могут не совпадать с $\varepsilon^{(h)}(t, x)$ ни при одном $h \in \mathcal{N}_0$. Вместе с тем известны регулярные случаи $(1, 6)$, в которых $c_0(t, x)$ и $\varepsilon^0(t, x)$ совпадают. Рассмотрим пример класса собственно линейных систем (1), (11), в которых функция c_0 и множества $\mathcal{W}_c$ определяются первой степенью операторов Γ и A_0 соответственно (в этом классе содержатся и не регулярные (1) системы). Заметим, что условия этого параграфа выполняются, например, в задаче сближения инерционной точки с безынерционной в заданный момент времени (см. (1) , стр. 242). Пусть $\mathcal{M} \subset R^h$ — выпуклый компакт ($h \leq n$), $f_0(x) = d(\{x\}_k, \mathcal{M})$ — евклидово расстояние от вектора $\{x\}_k$ первых координат x до $\mathcal{M}$, причем существует $\bar{y} \in C_k([t_0, \vartheta])$, $m_0 \in R^k$, число $r \geq 0$ и $\mathcal{M}^* \subset R^h$, для которых при всяких $t \in [t_0, \vartheta]$, $l \in R^h$, $\|l\|_k = 1$ ($\|\cdot\|_k$ — евклидова норма)

$$\int_{[t, \vartheta]} \max_Q \min_P l' \{X(\vartheta, \xi)f(\xi, u, v)\}_k \lambda(d\xi) = l'\bar{y}(t) + h_0(t);$$

$$h_0 \in C([t_0, \vartheta]), \quad h_0 \geq 0, \quad (13)$$

$$\mathcal{M} = m_0 + S_k(0, r) + \mathcal{M}^*, \quad (14)$$

причем опорная функция ρ^* выпуклого множества $\mathcal{M}^*$ симметрична: $\rho^*(l) = \rho^*(-l)$ и для всякого $y \in R^h$ удовлетворяет неравенству

$$\max_{\|l\|_k=1} [l'y - \rho^*(l)] \geq 0 \quad (15)$$

(примером множества $\mathcal{M}^*$ может служить отрезок $\{x: x_1=0, x_2 \in [-b, +b]\} \subset R^2$, $b \geq 0$); здесь $C_k([t_0, \vartheta])$ — пространство непрерывных функций $(t_0, \vartheta) \rightarrow R^k$. Тогда справедлива

Теорема 4.1. Для всякой позиции $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times R^n$

$$c_0(t_*, x_*) = \varepsilon^{(1)}(t_*, x_*) = \max(\varepsilon^0(t_*, x_*), \max_{[t_*, \vartheta]} h_0(t) - r),$$

для всякого $c \geq 0$: $\mathcal{W}_c = A_0(\mathcal{W}_c^0)$.

5. Пусть система (1) имеет вид

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \quad (16)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы $n \times n$, $n \times p$ и $n \times q$, непрерывно зависящие от $t \in R^1$, $f_0(x) = d(\{x\}_k, \mathcal{M})$, где $\mathcal{M} \subset R^h$ — выпуклый компакт; для каждого $y \in R^h$

$$\|y\|_k^0 \max_{1 \leq i \leq k} |y_i|, \quad \|y\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^k y_i^2};$$

$S_k(y, \varepsilon)$, $S_k^0(y, \varepsilon)$ — замкнутые шары радиуса $\varepsilon \geq 0$ с центром в y в метриках $\|\cdot\|_k$ и $\|\cdot\|_k^0$ соответственно. Пусть при всех $t \in [t_0, \vartheta]$

$$\{X(\vartheta, t)B(t)P\}_k = S_k^0(\hat{y}(t), h_P(t)),$$

где $\hat{y} \in C_k([t_0, \vartheta])$, $h_P \in C([t_0, \vartheta])$, $h_P \geq 0$; и, кроме того, при всех $l \in R^h$, $\|l\|_k = 1$

$$\int_{[t, \vartheta]} \max_Q [l' \{X(\vartheta, \xi)C(\xi)v\}_k] \lambda(d\xi) = h_Q(t) + l'\hat{z}(t),$$

где $\hat{z} \in C_k([t_0, \vartheta])$, $h_Q \in C([t_0, \vartheta])$, $h_Q \geq 0$; λ — мера Лебега;

$$\mathcal{M} = m_0 + S_k^0(0, r) + S_k(0, \bar{r}),$$

где $m_0 \in R^h$, $r \geq 0$, $\bar{r} \geq 0$. При этих условиях справедлива

Теорема 5.1. Для всякой позиции $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times R^n$

$$c_0(t_*, x_*) = \varepsilon^{(1)}(t_*, x_*) = \max(\varepsilon^0(t_*, x_*),$$

$$\max_{[t_*, \vartheta]} [h_Q(t) - \int_{[t, \vartheta]} h_P(\xi) \lambda(d\xi)] - (r + \bar{r})),$$

для каждого $c \geq 0$ $\mathcal{W}_c = A_0(\mathcal{W}_c^0)$.

6. Для каждого отрезка $[t_1, t_2] \subset [t_0, \vartheta]$ обозначим $\{\alpha, [t_1, t_2]\}$ множество всех функций (квазистратегий) $\alpha: \{\mathcal{E}_\lambda, [t_1, t_2]\} \rightarrow 2^{(\mathcal{H}_\lambda, [t_1, t_2])}$, удовлетворяющим следующим условиям:

A.1) для каждого $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_1, t_2]\}$ множество $\alpha(v)$ непусто и *-слабо замкнуто;

A.2) для каждого $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_1, t_2]\}$ справедливо включение $\alpha(v) \subset \Pi(v)$, $[t_1, t_2]$;

A.3) пусть $v_i \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t_1, t_2]\}$, $i=1, 2$, $t \in [t_1, t_2]$ и для любого $D \in \mathcal{D}_{t_1, t_2} \cap ([t_1, t] \times Q)$ $v_1(D) = v_2(D)$. Тогда для каждого $\eta_1 \in \alpha(v_1)$ найдется такое $\eta_2 \in \alpha(v_2)$, что для любого $H \in \mathcal{F}_{t_1, t_2} \cap ([t_1, t] \times P \times Q)$: $\eta_1(H) = \eta_2(H)$ и, наоборот, для каждого $\eta_2 \in \alpha(v_2)$ найдется такое $\eta_1 \in \alpha(v_1)$, что для любого $H \in \mathcal{F}_{t_1, t_2} \cap ([t_1, t] \times P \times Q)$: $\eta_1(H) = \eta_2(H)$; здесь $\mathcal{D}_{t_1, t_2}$ и $\mathcal{F}_{t_1, t_2}$ — σ -алгебры борелевских подмножеств произведений $[t_1, t_2] \times Q$ и $[t_1, t_2] \times P \times Q$ соответственно.

Теорема 6.1. Для каждой позиции $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times R^n$

$$c_0(t_*, x_*) = \min_{(\alpha, [t^*, \vartheta])} \sup_{\{\mathcal{E}, [t^*, \vartheta]\}} \max_{\alpha(v)} f_0(\varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)), \quad (17)$$

оптимальную в смысле (17) квазистратегию $\alpha^0 \in \{\alpha, [t_*, \vartheta]\}$ можно определить условием: для каждого $v \in \{\mathcal{E}_\lambda, [t^*, \vartheta]\}$ $\alpha^0(v)$ — множество всех $\eta \in \Pi(v)$, $[t_*, \vartheta]$, для которых $(t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \in \mathcal{W}_c$ при всех $t \in [t_*, \vartheta]$, где $c = c_0(t_*, x_*)$ и $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)$ — программное движение, порожденное управлением η ^(5, 6).

Из теоремы 6.1 для нелинейной системы (1) вытекает совпадение гарантированного результата I игрока в классе позиционных процедур управления и в классе квазистратегий, определяемых условиями A.1—A.3.

Автор благодарит акад. Н. Н. Красовского за внимание к работе и ценные советы.

Институт математики и механики
Уральского научного центра Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
5 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, Позиционные дифференциальные игры, «Наука», 1974. ² Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ПММ, т. 34, № 6 (1970). ³ Б. Н. Пшеничный, ДАН, т. 184, № 2 (1969). ⁴ В. Н. Ушаков, В сб.: Экстремальные стратегии в позиционных дифференциальных играх, Свердловск, 1974. ⁵ А. Г. Ченцов, ДАН, т. 213, № 2 (1973). ⁶ А. Г. Ченцов, ДАН, т. 215, № 4 (1974).